

수능특강

수학영역 수학 I

정답과 풀이

01 지수와 로그

유제

본문 5~13쪽

1 ③	2 ③	3 ②	4 ⑤	5 ④
6 ⑤	7 ⑤	8 ③	9 ⑤	10 148

1 $n=2$ 일 때, $3-2=1$ 이므로 1의 제곱근 중 실수인 것의 개수는 방정식

$$x^2=1$$

의 서로 다른 실근의 개수이다.

즉, $f(2)=2$

$n=3$ 일 때, $3-3=0$ 이므로 0의 세제곱근 중 실수인 것의 개수는 방정식

$$x^3=0$$

의 서로 다른 실근의 개수이다.

즉, $f(3)=1$

$n=4$ 일 때, $3-4=-1$ 이므로 -1 의 네제곱근 중 실수인 것의 개수는 방정식

$$x^4=-1$$

의 실근의 개수이다.

즉, $f(4)=0$

따라서

$$f(2)+f(3)+f(4)=2+1+0=3$$

답 ③

2 $\frac{9}{2}$ 의 세제곱근 중 실수인 것이 a 이므로

$$a=\sqrt[3]{\frac{9}{2}}$$

또 36의 여섯제곱근 중 양수인 것이 b 이므로

$$b=\sqrt[6]{36}=\sqrt[6]{6^2}=\sqrt[3]{6}$$

따라서

$$a \times b = \sqrt[3]{\frac{9}{2}} \times \sqrt[3]{6}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{9}{2} \times 6}$$

$$= \sqrt[3]{27}$$

$$= \sqrt[3]{3^3}$$

$$= 3$$

답 ③

$$\begin{aligned} 3 \quad \sqrt[3]{2} \times 16^{-\frac{1}{3}} &= 2^{\frac{1}{3}} \times (2^4)^{-\frac{1}{3}} \\ &= 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{-\frac{4}{3}} \\ &= 2^{\frac{1}{3} + (-\frac{4}{3})} \\ &= 2^{-1} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

답 ②

$$\begin{aligned} 4 \quad (3^{\sqrt{3}+1})^{\sqrt{3}} \times (3^{\sqrt{3}+1})^{-1} \\ &= (3^{\sqrt{3}+1})^{\sqrt{3}-1} \\ &= 3^{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} \\ &= 3^2=9 \end{aligned}$$

답 ⑤

다른 풀이

$$\begin{aligned} (3^{\sqrt{3}+1})^{\sqrt{3}} \times (3^{\sqrt{3}+1})^{-1} \\ &= 3^{3+\sqrt{3}} \times 3^{-\sqrt{3}-1} \\ &= 3^{(3+\sqrt{3})+(-\sqrt{3}-1)} \\ &= 3^2=9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5 \quad \log_3 4 + \log_4 16 + \log_3 \frac{1}{12} \\ &= \log_3 4 + \log_3 \frac{1}{12} + \log_4 4^2 \\ &= \log_3 \left(4 \times \frac{1}{12} \right) + 2 \\ &= \log_3 3^{-1} + 2 \\ &= (-1) + 2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

답 ④

$$\begin{aligned} 6 \quad \log_2 \sqrt[3]{4^n} &= \log_2 \sqrt[3]{2^{2n}} = \log_2 2^{\frac{2n}{3}} = \frac{2n}{3} \\ \frac{2n}{3} \text{이 } 10 \text{ 이하의 자연수가 되도록 하는 자연수 } n \text{의 값은 } 3, \\ &6, 9, 12, 15 \text{이고 그 개수는 } 5 \text{이다.} \end{aligned}$$

답 ⑤

$$\begin{aligned} 7 \quad 3 \log_2 \sqrt{6} + \log_4 27 \\ &= 3 \log_2 6^{\frac{1}{2}} + \log_{2^2} 3^3 \\ &= 3 \times \frac{1}{2} \times \log_2 6 + \frac{3}{2} \log_2 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{3}{2} \log_2 6 - \frac{3}{2} \log_2 3 \\
 &= \frac{3}{2} (\log_2 6 - \log_2 3) \\
 &= \frac{3}{2} \log_2 \frac{6}{3} \\
 &= \frac{3}{2} \log_2 2 \\
 &= \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

답 ⑤

8 $\sqrt{3} \times 2^{\log_2 3}$

$$\begin{aligned}
 &= 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\log_2 2} \\
 &= 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{2} \log_2 2} \\
 &= 3^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \\
 &= 3
 \end{aligned}$$

9 $\log \sqrt[3]{300}$

$$\begin{aligned}
 &= \log 300^{\frac{1}{3}} \\
 &= \frac{1}{3} \log (3 \times 10^2) \\
 &= \frac{1}{3} \times (\log 3 + \log 10^2) \\
 &= \frac{1}{3} \times (\log 3 + 2) \\
 &= \frac{1}{3} \times (0.4771 + 2) \\
 &= \frac{1}{3} \times 2.4771 \\
 &= 0.8257
 \end{aligned}$$

답 ③

10 $\log A = 2.3010$

$$\begin{aligned}
 &= 2 + 0.3010 \\
 &= \log 10^2 + \log 2 \\
 &= \log (10^2 \times 2)
 \end{aligned}$$

그러므로 $A = 10^2 \times 2 = 200$

또

$$\begin{aligned}
 \log B &= 1.7093 \\
 &= 1 + 0.7093 \\
 &= \log 10 + \log 5.12 \\
 &= \log (10 \times 5.12)
 \end{aligned}$$

답 ⑤

그러므로 $B = 10 \times 5.12 = 51.2$

한편, $(x-A)(x-B) < 0$ 의 해는 $51.2 < x < 200$

따라서 자연수 x 의 값은 52, 53, 54, ..., 199이고 그 개수는

$$199 - 52 + 1 = 148$$

답 148

Level

1 기초 연습 본문 14~15쪽

1 ④	2 ④	3 ①	4 ④	5 ②
6 ②	7 ③	8 ②	9 ③	10 ④

1 $\sqrt[3]{\sqrt{12+2} \times \sqrt[3]{\sqrt{12}-2}}$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt[3]{(\sqrt{12+2})(\sqrt{12}-2)} \\
 &= \sqrt[3]{12-4} \\
 &= \sqrt[3]{8} \\
 &= \sqrt[3]{2^3} \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

답 ④

2 $9^{\frac{1}{6}} \times \sqrt[3]{\frac{1}{8} + 1}$

$$\begin{aligned}
 &= (3^2)^{\frac{1}{6}} \times \left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{1}{3}} \\
 &= 3^{\frac{1}{3}} \times \frac{(3^2)^{\frac{1}{3}}}{(2^3)^{\frac{1}{3}}} \\
 &= 3^{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}} \times \frac{1}{2} \\
 &= \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

답 ④

3 $\sqrt[3]{-24} \times 81^{\frac{1}{6}}$

$$\begin{aligned}
 &= -\sqrt[3]{24} \times (3^4)^{\frac{1}{6}} \\
 &= -(2^3 \times 3)^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} \\
 &= -(2 \times 3^{\frac{1}{3}}) \times 3^{\frac{2}{3}} \\
 &= -2 \times 3^{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}} \\
 &= -6
 \end{aligned}$$

답 ①

정답과 풀이

$$\begin{aligned}
 4 \quad & (\sqrt[6]{27}+1)(9^{\frac{1}{4}}-1) \\
 & = (27^{\frac{1}{6}}+1)(9^{\frac{1}{4}}-1) \\
 & = \{(3^3)^{\frac{1}{6}}+1\}\{(3^2)^{\frac{1}{4}}-1\} \\
 & = (3^{\frac{1}{2}}+1)(3^{\frac{1}{2}}-1) \\
 & = (3^{\frac{1}{2}})^2-1^2 \\
 & = 3-1 \\
 & = 2
 \end{aligned}$$

답 ④

$$\begin{aligned}
 5 \quad & (\sqrt{2^{\sqrt{3}}})^{\frac{1}{\sqrt{12}}} \times 2^{-\frac{5}{4}} \\
 & = (2^{\frac{\sqrt{3}}{2}})^{\frac{1}{\sqrt{12}}} \times 2^{-\frac{5}{4}} \\
 & = (2^{\frac{\sqrt{3}}{2}})^{\frac{1}{2\sqrt{3}}} \times 2^{-\frac{5}{4}} \\
 & = 2^{\frac{1}{4}} \times 2^{-\frac{5}{4}} \\
 & = 2^{\frac{1}{4}+(-\frac{5}{4})} \\
 & = 2^{-1} \\
 & = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

답 ②

$$\begin{aligned}
 6 \quad & \log_3 \sqrt[3]{\frac{9}{8}} + \log_3 2 \\
 & = \log_3 (3^2 \times 2^{-3})^{\frac{1}{3}} + \log_3 2 \\
 & = \log_3 (3^{\frac{2}{3}} \times 2^{-1}) + \log_3 2 \\
 & = \log_3 3^{\frac{2}{3}} + \log_3 2^{-1} + \log_3 2 \\
 & = \frac{2}{3} + (-\log_3 2) + \log_3 2 \\
 & = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

답 ②

다른 풀이

$$\begin{aligned}
 & \log_3 \sqrt[3]{\frac{9}{8}} + \log_3 2 \\
 & = \log_3 \{(3^2 \times 2^{-3})^{\frac{1}{3}} \times 2\} \\
 & = \log_3 \{(3^{\frac{2}{3}} \times 2^{-1}) \times 2\} \\
 & = \log_3 3^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7 \quad & (\log_3 6)^2 - (\log_3 2)^2 \\
 & = (\log_3 6 + \log_3 2)(\log_3 6 - \log_3 2) \\
 & = \log_3 (6 \times 2) \times \log_3 \frac{6}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & = \log_3 12 \times \log_3 3 \\
 & = \log_3 12
 \end{aligned}$$

답 ③

$$\begin{aligned}
 8 \quad & \log_3 2 + \log_3 9 \times \log_3 \frac{1}{\sqrt{6}} \\
 & = \log_3 2 + \log_3 3^2 \times \log_3 6^{-\frac{1}{2}} \\
 & = \log_3 2 + 2 \times \left(-\frac{1}{2} \log_3 6\right) \\
 & = \log_3 2 - \log_3 6 \\
 & = \log_3 \frac{2}{6} \\
 & = \log_3 \frac{1}{3} \\
 & = \log_3 3^{-1} \\
 & = -1
 \end{aligned}$$

답 ②

$$\begin{aligned}
 9 \quad & \left(\log_4 3 + \frac{1}{2}\right) \times \log_6 8 \\
 & = \left(\log_4 3 + \frac{1}{2} \log_4 4\right) \times \log_6 8 \\
 & = (\log_4 3 + \log_4 4^{\frac{1}{2}}) \times \log_6 8 \\
 & = (\log_4 3 + \log_4 2) \times \log_6 8 \\
 & = \log_4 (3 \times 2) \times \log_6 8 \\
 & = \log_4 6 \times \frac{\log_4 8}{\log_4 6} \\
 & = \log_4 8 \\
 & = \log_{2^2} 2^3 \\
 & = \frac{3}{2} \log_2 2 \\
 & = \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

답 ③

$$\begin{aligned}
 10 \quad & 6^{\log_3 2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_3 2} = 2^{\log_3 6} \times (2^{-1})^{\log_3 2} \\
 & = 2^{\log_3 6} \times 2^{-\log_3 2} \\
 & = 2^{\log_3 6 - \log_3 2} \\
 & = 2^{\log_3 \frac{6}{2}} = 2^{\log_3 3} \\
 & = 2^1 = 2
 \end{aligned}$$

답 ④

다른 풀이

$$\begin{aligned}
 6^{\log_3 2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_3 2} & = \left(6 \times \frac{1}{2}\right)^{\log_3 2} = 3^{\log_3 2} \\
 & = 2^{\log_3 3} = 2
 \end{aligned}$$

Level

2 기본 연습

본문 16~17쪽

- 1 ④ 2 ⑤ 3 ③ 4 ④ 5 ④
6 ② 7 ③ 8 ③

- 1 어떤 실수를
- k
- 라 하면 두 실수
- $2, a (a \neq 2)$
- 는 방정식

$$x^n = k$$

의 근이다.

이때 서로 다른 두 실근이 존재하기 위해서는 n 은 짝수이어야 하므로 n 의 값은

$$2, 4, 6, \dots, 100$$

그러므로 $p=50$ 이때 a 의 값은 -2 이다.

따라서

$$p+a=50+(-2)=48$$

답 ④

- 2
- a
- 의
- n
- 제곱근은 다음 방정식의 근이다.

$$x^n = a$$

이 방정식의 한 근이 $\sqrt[6]{2} \times \sqrt[3]{4}$ 이므로

$$(\sqrt[6]{2} \times \sqrt[3]{4})^n = a$$

$$(2^{\frac{1}{6}} \times 2^{\frac{2}{3}})^n = a$$

$$(2^{\frac{5}{6}})^n = a$$

 a 가 자연수이므로 n 의 최솟값은 6이고, 이때의 a 의 값은 2^5 따라서 $\alpha=6, \beta=2^5$ 이므로

$$\alpha+\beta=6+2^5=6+32=38$$

답 ⑤

- 3 이차방정식
- $x^2 - \sqrt[6]{3}x - \frac{2\sqrt[3]{3}}{3} = 0$
- 의 두 근이
- α, β
- 이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=\sqrt[6]{3}, \alpha\beta=-\frac{2\sqrt[3]{3}}{3}$$

따라서

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$$

$$=(\sqrt[6]{3})^3-3 \times \left(-\frac{2\sqrt[3]{3}}{3}\right) \times \sqrt[6]{3}$$

$$=(3^{\frac{1}{6}})^3+2 \times 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{6}}$$

$$=3^{\frac{1}{6} \times 3}+2 \times 3^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}$$

$$=3^{\frac{1}{2}}+2 \times 3^{\frac{1}{2}}$$

$$=3 \times 3^{\frac{1}{2}}$$

$$=3\sqrt{3}$$

답 ③

- 4 선분 AB가 원의 지름이므로

$$\angle ACB=90^\circ$$

직각삼각형 ABC에서

$$\overline{AB}=\sqrt{\overline{CA}^2+\overline{CB}^2}$$

$$=\sqrt{(\sqrt[4]{3})^2+(\sqrt[4]{12})^2}$$

$$=\sqrt{(3^{\frac{1}{4}})^2+\{(2^2 \times 3)^{\frac{1}{4}}\}^2}$$

$$=\sqrt{3^{\frac{1}{2}}+2 \times 3^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\sqrt{3 \times 3^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\sqrt{3^{1+\frac{1}{2}}}$$

$$=(3^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}}$$

$$=3^{\frac{3}{4}}$$

이때 $\angle CAB=\theta$ 라 하면 직각삼각형 ABC에서

$$\cos \theta = \frac{\overline{CA}}{\overline{AB}}$$

$$= \frac{3^{\frac{1}{4}}}{3^{\frac{3}{4}}}$$

$$= 3^{\frac{1}{4}-\frac{3}{4}}$$

$$= 3^{-\frac{1}{2}} \quad \dots \textcircled{1}$$

또 직각삼각형 AHC에서

$$\cos \theta = \frac{\overline{AH}}{\overline{CA}}$$

$$= \frac{\overline{AH}}{3^{\frac{1}{4}}} \quad \dots \textcircled{2}$$

\textcircled{1}, \textcircled{2}에서

$$3^{-\frac{1}{2}} = \frac{\overline{AH}}{3^{\frac{1}{4}}}$$

따라서

$$\overline{AH} = 3^{-\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{4}}$$

$$= 3^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}$$

$$= 3^{-\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$$

답 ④

정답과 풀이

- 5 점 A(0, $\log_2 ab$)가 직선 $y=2x+3$ 위에 있으므로
 $\log_2 ab=2 \times 0+3$
 $\log_2 a+\log_2 b=3 \dots\dots \textcircled{1}$
 또 점 B($1, \log_2 \frac{b}{a}$)가 직선 $y=2x+3$ 위에 있으므로
 $\log_2 \frac{b}{a}=2 \times 1+3$
 $\log_2 b-\log_2 a=5 \dots\dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}$ 과 $\textcircled{2}$ 을 변끼리 더하면
 $2 \log_2 b=8$
 $\log_2 b=4$
 $b=2^4=16$
 또 $\log_2 b=4$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면
 $\log_2 a=-1$
 $a=2^{-1}=\frac{1}{2}$
 따라서
 $a+b=\frac{1}{2}+16=\frac{33}{2}$

답 ④

- 6 $\log_4 a + \log_4 b = \frac{5}{2}$ 에서
 $\log_4 ab = \frac{5}{2}$
 $ab = 4^{\frac{5}{2}} = (2^2)^{\frac{5}{2}} = 2^5$
 따라서 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b) 는
 $(1, 2^5), (2^1, 2^4), (2^2, 2^3), (2^3, 2^2), (2^4, 2^1), (2^5, 1)$
 이고 그 개수는 6이다.

답 ②

- 7 두 직선 $y=(\log_2 3)x, y=(\log_3 a)x$ 가 서로 수직이므로
 $\log_2 3 \times \log_3 a = -1$
 $\log_2 3 \times \log_3 a = -1$
 $\log_2 3 \times \left(\frac{1}{2} \log_3 a\right) = -1$
 $\log_2 3 \times \log_3 a = -2$
 $\log_2 a = -2$
 따라서 $a=2^{-2}=\frac{1}{4}$

답 ③

- 8 $\log_a b : \log_b a = \log_a ab : 2$ 에서
 $\log_a b : \frac{1}{\log_a b} = (1 + \log_a b) : 2$

$$2 \log_a b = \frac{1}{\log_a b} (\log_a b + 1)$$

$$2(\log_a b)^2 = \log_a b + 1$$

$$2(\log_a b)^2 - \log_a b - 1 = 0$$

$$(2 \log_a b + 1)(\log_a b - 1) = 0$$

$$\log_a b = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } \log_a b = 1$$

이때 $a \neq b$ 이므로

$$\log_a b = -\frac{1}{2}$$

따라서

$$\log_a b + \log_b \frac{1}{a}$$

$$= \log_a b - \log_b a$$

$$= \log_a b - \frac{1}{\log_a b}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right) - (-2)$$

$$= \frac{3}{2}$$

답 ③

Level

3 실력 완성

본문 18쪽

1 ①
2 ②
3 ③

- 1 $A_1 = \{64\}$ 이므로 집합 A_2 는 64의 제곱근 중 실수인 것들의 집합이다.
 이때 방정식 $x^2=64$ 의 근 중 실수인 것은
 $8, -8$
 이므로
 $A_2 = \{-8, 8\}$
 또 집합 A_3 은 집합 A_2 에 속하는 각 원소의 세제곱근 중 실수인 것들의 집합이다.
 즉, 두 방정식 $x^3=-8, x^3=8$ 의 근 중 실수인 것은
 $-2, 2$
 이므로
 $A_3 = \{-2, 2\}$
 또 집합 A_4 는 집합 A_3 에 속하는 각 원소의 네제곱근 중 실수인 것들의 집합이다.
 즉, 두 방정식 $x^4=-2, x^4=2$ 의 근 중 실수인 것은 방정식 $x^4=2$ 에만 존재하고 그 값은
 $\sqrt[4]{2}, -\sqrt[4]{2}$

이므로

$$A_4 = \{-\sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{2}\}$$

또 집합 A_5 는 집합 A_4 에 속하는 각 원소의 다섯제곱근 중 실수인 것들의 집합이다.

즉, 두 방정식 $x^5 = -\sqrt[4]{2}$, $x^5 = \sqrt[4]{2}$ 의 근 중 실수인 것이다.

이때 방정식 $x^5 = -\sqrt[4]{2}$ 는 음의 실근 1개, 방정식 $x^5 = \sqrt[4]{2}$ 는 양의 실근 1개를 가지므로 집합 A_5 의 원소의 개수는 2이다.

따라서 집합 A_3 의 모든 원소의 곱은 -4 이고 집합 A_5 의 원소의 개수는 2이므로

$$p+q = (-4) + 2 = -2$$

답 ①

2 $\sqrt[n]{p} \times \sqrt[n]{q} = -\sqrt[3]{2}$ 에서 $\sqrt[n]{p} \times \sqrt[n]{q}$ 의 값이 음수이므로 $\sqrt[n]{p}$, $\sqrt[n]{q}$ 중 하나는 양수, 하나는 음수이다.

이때 $p < q$ 이므로

$$\sqrt[n]{p} < 0, \sqrt[n]{q} > 0$$

위에서 $\sqrt[n]{p}$ 는 p 의 n 제곱근 중 실수이고 이 값이 음수이므로 n 은 홀수이어야 한다.

한편, $\sqrt[n]{p} \times \sqrt[n]{q} = -\sqrt[3]{2}$ 의 양변을 n 제곱하면

$$p \times q = (-1)^n \times (\sqrt[3]{2})^n = (-1)^n \times 2^{\frac{n}{3}} = -2^{\frac{n}{3}}$$

이때 n ($2 \leq n \leq 20$)은 홀수이고 $-2^{\frac{n}{3}}$ 의 값이 정수이어야 하므로

$$n = 3, 9, 15$$

(i) $n=3$ 일 때

$$p \times q = -2$$

이때 순서쌍 (p, q) 는

$$(-1, 2), (-2, 1)$$

이고 그 개수는 2이다.

(ii) $n=9$ 일 때

$$p \times q = -2^3$$

이때 순서쌍 (p, q) 는

$$(-1, 2^3), (-2, 2^2), (-2^2, 2), (-2^3, 1)$$

이고 그 개수는 4이다.

(iii) $n=15$ 일 때

$$p \times q = -2^5$$

이때 순서쌍 (p, q) 는

$$(-1, 2^5), (-2, 2^4), (-2^2, 2^3), (-2^3, 2^2),$$

$$(-2^4, 2), (-2^5, 1)$$

이고 그 개수는 6이다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 모든 순서쌍 (p, q) 의 개수는

$$2+4+6=12$$

답 ②

3 $\log_{2n} \sqrt{m} + \log_{2n} \sqrt{m+1} \times \log_{m+1} m = \frac{3}{2}$ 에서

$$\frac{1}{2} \log_{2n} m + \frac{1}{2} \log_{2n} (m+1) \times \log_{m+1} m = \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{2} \log_{2n} m + \frac{1}{2} \log_{2n} m = \frac{3}{2}$$

$$\log_{2n} m = \frac{3}{2}$$

로그의 정의를 이용하면

$$(2n)^{\frac{3}{2}} = m$$

$$(2n)^3 = m^2$$

$$2^3 \times n^3 = m^2 \quad \dots \dots \text{㉠}$$

이때 좌변이 어떤 자연수의 제곱이어야 하므로

$$n = 2 \times p^2 \quad (p \text{는 자연수})$$

이 식을 ㉠에 대입하면

$$2^6 \times p^6 = m^2$$

$$m = 2^3 \times p^3$$

그러므로 p 의 값에 따라 n, m 의 값을 구하면 다음과 같다.

$$p=1 \text{일 때, } n=2 \times 1^2, m=2^3 \times 1^3$$

$$p=2 \text{일 때, } n=2 \times 2^2, m=2^3 \times 2^3$$

$$p=3 \text{일 때, } n=2 \times 3^2, m=2^3 \times 3^3$$

$$p=4 \text{일 때, } n=2 \times 4^2, m=2^3 \times 4^3$$

⋮

이때 m, n 이 500 이하의 자연수이므로 p 의 값은 3 이하의 자연수이어야 한다.

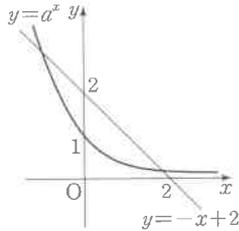
따라서 모든 순서쌍 (m, n) 의 개수는 3이다.

답 ③

02 지수함수와 로그함수

유제		본문 21~29쪽					
1 ①	2 ②	3 ③	4 17	5 ③			
6 205	7 ③	8 ③	9 52	10 ④			

- 1 함수 $y=a^x$ 의 그래프가 직선 $y=-x+2$ 와 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로 $0 < a < 1$ ㉠



또 $f(1)+f(-1)=\frac{5}{2}$ 에서

$$a + \frac{1}{a} = \frac{5}{2}$$

$$2a^2 - 5a + 2 = 0$$

$$(2a-1)(a-2) = 0$$

$$a = \frac{1}{2} \text{ 또는 } a = 2$$

이때 ㉠을 만족시켜야 하므로

$$a = \frac{1}{2}$$

따라서 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 이므로

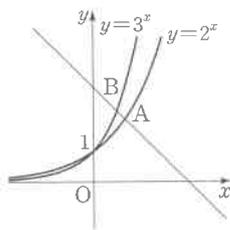
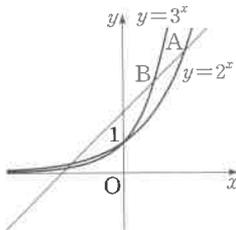
$$f(2) = \frac{1}{4}$$

답 ①

- 2 직선 $y=mx+k$ ($k > 1$)이 두 함수 $y=2^x$, $y=3^x$ 의 그래프와 제1사분면에서 만나는 점을 각각 A, B라 하자.

(i) $m > 0$ 일 때

(ii) $m < 0$ 일 때



이때 점 A의 x좌표는 2, 점 B의 x좌표는 1이므로

$A(2, 2^2), B(1, 3^1)$

그러므로 직선 AB의 방정식은

$$y = \frac{3-4}{1-2}(x-1) + 3$$

$$y = x + 2$$

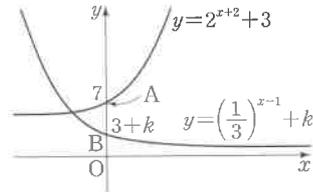
따라서 $m=1, k=2$ 이므로

$$mk = 1 \times 2 = 2$$

답 ②

- 3 함수 $y=2^{x+2}+3$ 의 그래프는 함수 $y=2^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 것이고 점 $A(0, 7)$ 을 지난다.

또 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} + k = 3^{-(x-1)} + k$ 이므로 이 함수의 그래프는 함수 $y=3^x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 것이고 점 $B(0, 3+k)$ 를 지난다.



두 함수 $y=2^{x+2}+3, y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}+k$ 의 그래프가 제2사분면에서 만나기 위해서는 점 A의 y 좌표가 점 B의 y 좌표보다 커야 하므로

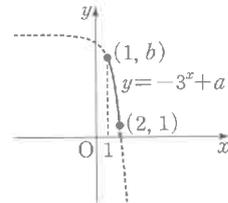
$$7 > 3+k$$

$$k < 4$$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 k 의 값은 1, 2, 3이고 그 개수는 3이다.

답 ③

- 4 함수 $y=-3^x+a$ 의 그래프는 함수 $y=3^x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이다.

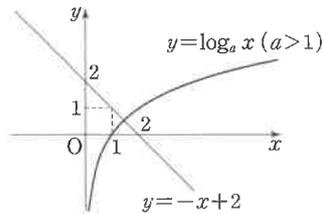


정의역이 $\{x | 1 \leq x \leq 2\}$ 인 함수 $y=-3^x+a$ 는 $x=1$ 에서 최댓값을 갖고 $x=2$ 에서 최솟값을 갖는다.

최솟값이 1이므로 $-3^2+a=1$ 에서
 $a=10$
 또 최댓값이 b 이므로
 $b=-3^1+10=7$
 따라서
 $a+b=10+7=17$

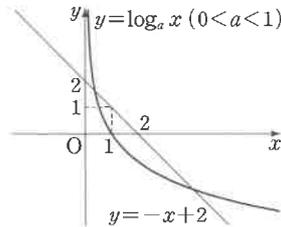
답 17

- 5 a 의 값의 범위에 따라 함수 $y=\log_a x$ 의 그래프와 직선 $y=-x+2$ 가 만나는 점의 개수를 조사하면 다음과 같다.
 (i) $a > 1$ 일 때



함수 $y=\log_a x$ 의 그래프와 직선 $y=-x+2$ 가 만나는 점의 개수는 1이다.

- (ii) $0 < a < 1$ 일 때



함수 $y=\log_a x$ 의 그래프와 직선 $y=-x+2$ 가 만나는 점의 개수는 2이다.

- (i), (ii)에서 $0 < a < 1$
 한편, $|f(2)|=2$ 에서

$$|\log_a 2|=2$$

$$\log_a 2=2 \text{ 또는 } \log_a 2=-2$$

$$a^2=2 \text{ 또는 } a^{-2}=2$$

$$a > 0 \text{ 이므로}$$

$$a=\sqrt{2} \text{ 또는 } a=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

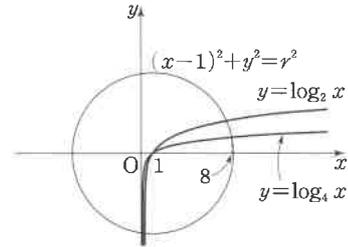
이때 $0 < a < 1$ 이므로

$$a=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

답 ③

- 6 두 함수 $y=\log_2 x$, $y=\log_4 x$ 의 그래프와 원 $(x-1)^2+y^2=r^2$ 은 그림과 같고 네 교점 중 x 좌표가 가

장 큰 점은 원 $(x-1)^2+y^2=r^2$ 과 함수 $y=\log_4 x$ 의 그래프가 제1사분면에서 만나는 점이다.



$\log_4 8 = \log_{2^2} 2^3 = \frac{3}{2}$ 이므로 원 $(x-1)^2+y^2=r^2$ 은

점 $(8, \frac{3}{2})$ 을 지난다.

따라서 $(8-1)^2+(\frac{3}{2})^2=r^2$ 이므로

$$4r^2=4 \times \left\{ (8-1)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \right\}$$

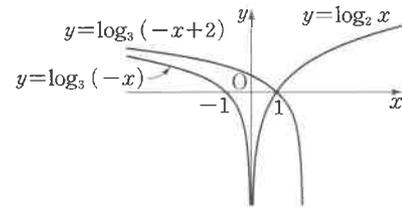
$$=4 \times \left(49 + \frac{9}{4} \right)$$

$$=196+9$$

$$=205$$

답 205

- 7 $\log_3(-x+m) = \log_3\{-(x-m)\}$ 이므로
 함수 $y=\log_3(-x+m)$ 의 그래프는 함수 $y=\log_3 x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 m 만큼 평행이동한 것이다.



이때 함수 $y=\log_3(-x)$ 의 그래프는 점 $(-1, 0)$ 을 지나므로 이 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼 평행이동하면 점 $(1, 0)$ 을 지난다.

따라서 함수 $y=\log_2 x$ 의 그래프와 함수

$y=\log_3(-x+m)$ 의 그래프가 제1사분면에서 만나려면 $m > 2$ 이어야 하므로 자연수 m 의 최솟값은 3이다.

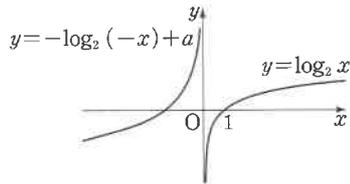
답 ③

- 8 함수 $y=-\log_2(-x)+a$ 의 그래프는 함수 $y=\log_2 x$ 의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 후 y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이다.

이때 함수 $y=-\log_2(-x)+a$ 의 그래프는 x 의 값이 증가

정답과 풀이

하면 y 의 값도 증가한다.



그러므로 정의역이 $\left\{x \mid -4 \leq x \leq -\frac{1}{8}\right\}$ 인

함수 $y = -\log_2(-x) + a$ 는 $x = -\frac{1}{8}$ 에서 최댓값을 갖고 최댓값이 4이므로

$$\begin{aligned} 4 &= -\log_2 \frac{1}{8} + a \\ &= -\log_2 2^{-3} + a \\ &= 3 + a \end{aligned}$$

$$a = 1$$

또 함수 $y = -\log_2(-x) + 1$ 은 $x = -4$ 에서 최솟값을 갖고 최솟값이 b 이므로

$$\begin{aligned} b &= -\log_2 4 + 1 \\ &= -\log_2 2^2 + 1 \\ &= -2 + 1 \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } a + b = 1 + (-1) = 0$$

답 ③

9 함수 $y = \log_a x$ 의 그래프가 원 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ 과 만나려면 $0 < a < 1$ 이어야 하므로

$$\log_a(3x+1) \leq \log_a(x+6) \text{에서}$$

$$3x+1 \geq x+6$$

$$2x \geq 5$$

$$x \geq \frac{5}{2} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

한편, 진수의 조건으로부터

$$3x+1 > 0 \text{이고 } x+6 > 0$$

$$\text{즉, } x > -\frac{1}{3} \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7} \text{과 } \textcircled{8} \text{에서 } x \geq \frac{5}{2}$$

x 가 10 이하의 자연수이므로 x 의 값은 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10이고 그 합은 52이다.

답 52

10 $4^{|x-1|} = 2\sqrt{2}$ 에서

$$(2^2)^{|x-1|} = 2^1 \times 2^{\frac{1}{2}}$$

$$2^{2|x-1|} = 2^{\frac{3}{2}}$$

$$2|x-1| = \frac{3}{2}$$

$$|x-1| = \frac{3}{4}$$

$$x-1 = \frac{3}{4} \text{ 또는 } x-1 = -\frac{3}{4}$$

$$x = \frac{7}{4} \text{ 또는 } x = \frac{1}{4}$$

따라서 모든 x 의 값의 곱은

$$\frac{7}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{7}{16}$$

답 ④

Level

1 기초 연습 본문 30~31쪽

1 ③	2 ②	3 ④	4 ②	5 ④
6 ②	7 ④	8 ①	9 ③	10 ②

1 $f(x) = a^x$ 이므로

$$(f \circ f)(0) = f(f(0)) = f(a^0) = f(1) = a = \sqrt{2}$$

따라서 $f(x) = (\sqrt{2})^x$ 이므로

$$f(3) = (\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$$

답 ③

2 함수 $y = a^x$ 의 정의역이 $\{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$ 이므로 다음 각 경우로 나눌 수 있다. 이때 $f(x) = a^x$ 이라 하자.

(i) $a > 1$ 일 때

함수 $y = f(x)$ 는 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하므로 치역은

$$\{y \mid f(0) \leq y \leq f(1)\} = \{y \mid 1 \leq y \leq a\}$$

이것은 치역이 $\left\{y \mid \frac{1}{3} \leq y \leq b\right\}$ 라는 조건을 만족시키지 못한다.

(ii) $0 < a < 1$ 일 때

함수 $y = f(x)$ 는 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소하므로 치역은

$$\{y \mid f(1) \leq y \leq f(0)\} = \{y \mid a \leq y \leq 1\}$$

이때 치역이 $\left\{y \mid \frac{1}{3} \leq y \leq b\right\}$ 이므로

$$a = \frac{1}{3}, b = 1$$

(i), (ii)에서 $a = \frac{1}{3}, b = 1$ 이므로

$$a + b = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$

답 ②

- 3 $4 \times 2^{x-1} + 3 = 2^2 \times 2^{x-1} + 3 = 2^{x+1} + 3$
 이므로 함수 $y = 4 \times 2^{x-1} + 3$ 의 그래프는 함수 $y = 2^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 것이다.
 따라서 $a = 2$, $m = -1$, $n = 3$ 이므로
 $a + m + n = 2 + (-1) + 3 = 4$

답 ④

- 4 함수 $y = -\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} + 1$ 의 그래프는 함수 $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이다.
 따라서 함수 $y = -\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} + 1$ 은 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하므로 정의역이 $\{x \mid -1 \leq x \leq 3\}$ 인 함수
 $y = -\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} + 1$ 은 $x = 3$ 에서 최댓값을 갖고 그 값은
 $-\left(\frac{2}{3}\right)^1 + 1 = \frac{1}{3}$

답 ②

- 5 함수 $y = 2^{x-1} + 2$ 의 그래프는 함수 $y = 2^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이다. 그러므로 점근선의 방정식은 $y = 2$
 점 (a, b) 와 직선 $y = 2$ 사이의 거리가 1 이고 $b > 2$ 이므로
 $b - 2 = 1$
 $b = 3$
 이때 점 $(a, 3)$ 이 함수 $y = 2^{x-1} + 2$ 의 그래프 위에 있으므로
 $2^{a-1} + 2 = 3$
 $2^{a-1} = 1$
 $a = 1$
 따라서
 $a + b = 1 + 3 = 4$

답 ④

- 6 $y = \frac{2}{3} \log_4 \frac{1}{x}$
 $= \frac{2}{3} \log_2 x^{-1}$
 $= \frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \log_2 x$
 $= -\frac{1}{3} \log_2 x$
 $= \log_{2^{-3}} x$
 $= \log_{\frac{1}{8}} x$

이므로

$$a = \frac{1}{8}$$

답 ②

- 7 함수 $y = \log_3 x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 그래프를 나타내는 함수는
 $y = -\log_3 x$
 함수 $y = -\log_3 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수는
 $y = -\log_3 (x-1) + 2$
 함수 $y = -\log_3 (x-1) + 2$ 의 그래프가 점 $(4, a)$ 를 지나므로
 $a = -\log_3 (4-1) + 2$
 $= -\log_3 3 + 2$
 $= -1 + 2$
 $= 1$

답 ④

- 8 함수 $y = 4^{x-1} + 1$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수는
 $y = 4^{(x-1)-1} + 1$
 즉, $y = 4^{x-2} + 1$
 함수 $y = 4^{x-2} + 1$ 의 그래프를 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 그래프를 나타내는 함수는
 $x = 4^{y-2} + 1$
 $4^{y-2} = x - 1$
 $y - 2 = \log_4 (x-1)$
 $y = \log_4 (x-1) + 2$
 함수 $y = \log_4 (x-1) + 2$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표를 구하기 위해 $y = 0$ 을 대입하면
 $0 = \log_4 (x-1) + 2$
 $\log_4 (x-1) = -2$
 $x - 1 = 4^{-2}$
 따라서
 $x = \frac{1}{16} + 1 = \frac{17}{16}$

답 ①

- 9 $y = \log_7 (8x-1)$
 $= \log_7 \left[8 \left(x - \frac{1}{8} \right) \right]$
 $= \log_7 \left(x - \frac{1}{8} \right) + \log_7 8$

정답과 풀이

함수 $y = \log_7 \left(x - \frac{1}{8}\right) + \log_7 8$ 의 그래프는

함수 $y = \log_7 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{1}{8}$ 만큼, y 축의 방향으로 $\log_7 8$ 만큼 평행이동한 것이므로 점근선의 방정식은

$$x = \frac{1}{8}$$

직선 $x = \frac{1}{8}$ 이 함수 $y = \log_{\frac{1}{4}} x$ 의 그래프와 만나는 점의 y 좌표는

$$\begin{aligned} y &= \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{8} \\ &= \log_{2^{-2}} 2^{-3} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

답 ③

10 $\log_2(x+7) < 1 - \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$ 에서

$$\log_2(x+7) < 1 - \log_{2^{-1}}(x+1)$$

$$\log_2(x+7) < 1 + \log_2(x+1)$$

$$\log_2(x+7) < \log_2 2 + \log_2(x+1)$$

$$\log_2(x+7) < \log_2 2(x+1)$$

밑 2가 1보다 크므로

$$x+7 < 2x+2$$

$$x > 5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 진수의 조건으로부터

$$x+7 > 0 \text{이고 } x+1 > 0$$

$$\text{즉, } x > -1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①과 ②에서 $x > 5$

따라서 자연수 x 의 최솟값은 6이다.

답 ②

Level 2 기본 연습

본문 32~33쪽

- | | | | | |
|-----|-----|-----|------|-----|
| 1 ⑤ | 2 ⑤ | 3 ② | 4 29 | 5 ① |
| 6 ④ | 7 ④ | 8 ③ | | |

1 x 의 값의 범위에 따라 함수 $f(x)$ 를 구하면 다음과 같다.

(i) $x > 0$ 일 때

함수 $y = 4^x$ 의 그래프가 함수 $y = 2^x$ 의 그래프보다 위쪽에 있으므로

$$f(x) = 4^x$$

(ii) $x \leq 0$ 일 때

함수 $y = 2^x$ 의 그래프가 함수 $y = 4^x$ 의 그래프보다 위쪽에 있거나 점 $(0, 1)$ 에서 만나므로

$$f(x) = 2^x$$

(i), (ii)에서

$$f(x) = \begin{cases} 4^x & (x > 0) \\ 2^x & (x \leq 0) \end{cases}$$

한편, 양수 a 에 대하여

$$f(a) \times f(-a) = f(0) + 7 \text{이므로}$$

$$4^a \times 2^{-a} = 1 + 7$$

$$2^{2a} \times 2^{-a} = 8$$

$$2^a = 2^3$$

따라서 $a = 3$

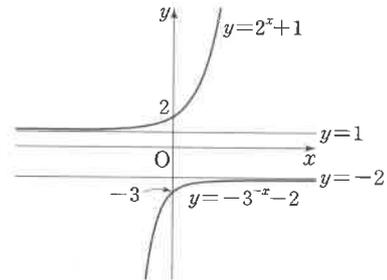
답 ⑤

2 함수 $y = 2^x + 1$ 의 그래프는 함수 $y = 2^x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 점근선은 직선 $y = 1$ 이다. 또 함수 $y = -\left(\frac{1}{3}\right)^x + a = -3^{-x} + a$ 의 그래프는 함수 $y = 3^x$ 의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 후 y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이다. 그러므로 점근선은 직선 $y = a$ 이다.

두 점근선 $y = 1, y = a$ 사이의 거리가 3이므로

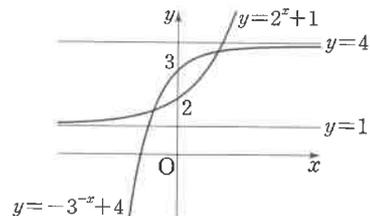
$$a = -2 \text{ 또는 } a = 4$$

(i) $a = -2$ 일 때



두 함수 $y = 2^x + 1, y = -\left(\frac{1}{3}\right)^x - 2$ 의 그래프는 만나지 않는다.

(ii) $a = 4$ 일 때



두 함수 $y=2^x+1$, $y=-\left(\frac{1}{3}\right)^x+4$ 의 그래프는 만난다.
 (i), (ii)에 의하여
 $a=4$

답 ⑤

3 함수 $y=a^{x-1}+2$ 의 그래프는 함수 $y=a^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

(i) $a>1$ 일 때
 함수 $y=a^x$ 은 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.
 그러므로 정의역이 $\{x|2\leq x\leq 3\}$ 인 함수 $y=a^{x-1}+2$ 는 $x=2$ 에서 최솟값 $\frac{9}{4}$ 를 가져야 한다.

즉, $a+2=\frac{9}{4}$ 에서 $a=\frac{1}{4}$
 이것은 $a>1$ 인 조건을 만족시키지 못한다.

(ii) $0<a<1$ 일 때
 함수 $y=a^x$ 은 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.
 그러므로 정의역이 $\{x|2\leq x\leq 3\}$ 인 함수 $y=a^{x-1}+2$ 는 $x=3$ 에서 최솟값 $\frac{9}{4}$ 를 가져야 한다.

즉, $a^2+2=\frac{9}{4}$ 에서 $a^2=\frac{1}{4}$
 이때 $a>0$ 이므로
 $a=\frac{1}{2}$
 이것은 $0<a<1$ 인 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $a=\frac{1}{2}$ 이므로

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+2$
 이 함수는 $x=2$ 에서 최댓값 b 를 가지므로
 $b=\left(\frac{1}{2}\right)^{2-1}+2=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$
 따라서 $a+b=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}=3$

답 ②

4 함수 $y=3^{x+2}+4$ 의 그래프는 함수 $y=3^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2만큼, y 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

함수 $y=3^x$ 의 그래프 위의 점을 (p, q) 라 하면 위의 평행이동에 의해 점 (p, q) 는 점 $(p-2, q+4)$ 로 옮겨지고 이 점은 함수 $y=3^{x+2}+4$ 의 그래프 위의 점이다.

이때 두 점 (p, q) , $(p-2, q+4)$ 를 지나는 직선의 기울기가 -2이므로

$A(p, q)$, $B(p-2, q+4)$
 라 하면 선분 AB의 중점의 좌표는
 $\left(\frac{p+(p-2)}{2}, \frac{q+(q+4)}{2}\right)$, 즉 $(p-1, q+2)$

이 중점의 좌표가 $(2, a)$ 이므로
 $p-1=2, q+2=a$
 $p=3, a=q+2$
 또 점 $A(3, q)$ 는 함수 $y=3^x$ 의 그래프 위의 점이므로
 $q=3^3$
 따라서 $a=3^3+2=29$

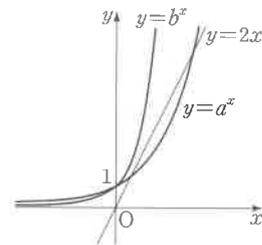
답 29

5 함수 $y=\log_b x$ ($b>0, b\neq 1$)의 역함수는 $y=b^x$

또 함수 $y=\frac{1}{2}x$ 의 역함수는 $y=2x$ 이다.

이때 조건 (나)에서 함수 $y=\log_b x$ 의 그래프가 직선 $y=\frac{1}{2}x$ 와 만나지 않으므로 함수 $y=b^x$ 의 그래프는 직선 $y=2x$ 와 만나지 않는다.

또 조건 (가)에서 함수 $y=a^x$ ($a>0, a\neq 1$)의 그래프와 직선 $y=2x$ 는 서로 다른 두 점에서 만나므로 다음과 같다.



이때 $1<a<b$ 이므로

$0<\frac{a}{b}<1$

그러므로 함수 $y=\left(\frac{a}{b}\right)^x$ 은 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

이때 정의역이 $\{x|-1\leq x\leq 2\}$ 인 함수 $y=\left(\frac{a}{b}\right)^x$ 은

$x=-1$ 에서 최댓값 2를 가지므로

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}=2$$

$$\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$$

함수 $y=\left(\frac{a}{b}\right)^x$ 은 $x=2$ 에서 최솟값을 가지므로 구하는 최솟값은

정답과 풀이

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

답 ①

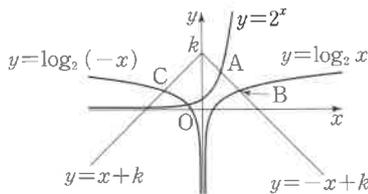
6 $y = -|x| + k$

$$= \begin{cases} -x+k & (x \geq 0) \\ x+k & (x < 0) \end{cases}$$

한편, 두 함수 $y=2^x$, $y=\log_2 x$ 는 서로 역함수이므로 두 함수 $y=2^x$, $y=\log_2 x$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

그러므로 기울기가 -1 인 직선 $y=-x+k$ 와 두 함수 $y=2^x$, $y=\log_2 x$ 의 그래프가 만나는 두 점 A, B는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

그러므로 A(p , q)라 하면 B(q , p)



또 두 직선 $y=-x+k$, $y=x+k$ 는 y 축에 대하여 대칭이고 두 함수 $y=\log_2 x$, $y=\log_2(-x)$ 의 그래프도 y 축에 대하여 대칭이므로 두 점 B, C는 y 축에 대하여 대칭이다.

그러므로 C($-q$, p)

이때 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(\frac{2}{3}, a)$ 이므로

$$\frac{p+q+(-q)}{3} = \frac{2}{3} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\frac{q+p+p}{3} = a \quad \dots \textcircled{2}$$

①에서 $p=2$ 이고 $q=2^p=2^2=4$ 이므로 ②에서

$$a = \frac{4+2+2}{3} = \frac{8}{3}$$

또 점 A(2, 4)가 직선 $y=-x+k$ 위에 있으므로

$$4 = -2 + k$$

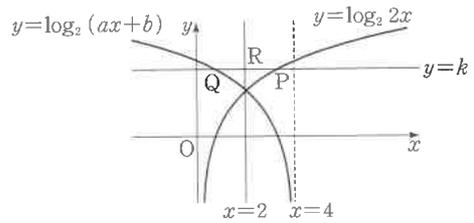
$$k = 6$$

$$\text{따라서 } k+a = 6 + \frac{8}{3} = \frac{26}{3}$$

답 ④

7 $\log_2 2x = \log_2 x + \log_2 2 = \log_2 x + 1$ 이므로 함수 $y=\log_2 2x$ 의 그래프는 함수 $y=\log_2 x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다. 이때 점근선은 y 축이다.

한편, $a < 0$ 이고 $\overline{PR} = \overline{QR}$ 이므로 함수 $y=\log_2(ax+b)$ 의 그래프는 그림과 같이 점근선이 직선 $x=4$ 이어야 한다.



그러므로 함수 $y=\log_2(ax+b)$ ($a < 0$)의 그래프는 함수 $y=\log_2 x + 1$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 4만큼 평행이동하면 된다.

이때 함수 $y=\log_2 x + 1$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 그래프를 나타내는 함수는 $y=\log_2(-x) + 1$ 이고 이 그래프를 x 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수는 $y=\log_2\{-(x-4)\} + 1$ 이다. 즉,

$$\begin{aligned} \log_2(ax+b) &= \log_2\{-(x-4)\} + 1 \\ &= \log_2(-x+4) + 1 \\ &= \log_2\{2 \times (-x+4)\} \\ &= \log_2(-2x+8) \end{aligned}$$

따라서 $a=-2$, $b=8$ 이므로

$$ab = (-2) \times 8 = -16$$

답 ④

8 점 C의 x 좌표를 p 라 하면

$$C(p, 4^{p+1})$$

이때 세 점 A, B, C의 y 좌표가 각각 $6\sqrt{2}$, 0 , 4^{p+1} 이고

$$\overline{AC} : \overline{CB} = 1 : 2 \text{이므로}$$

$$\frac{1 \times 0 + 2 \times 6\sqrt{2}}{1+2} = 4^{p+1}$$

$$4^{p+1} = 4\sqrt{2}$$

$$(2^2)^{p+1} = 2^{2+\frac{1}{2}}$$

$$2^{2p+2} = 2^{\frac{5}{2}}$$

$$2p+2 = \frac{5}{2}$$

$$2p = \frac{1}{2}$$

$$\text{따라서 } p = \frac{1}{4}$$

답 ③

Level 3 실력 완성

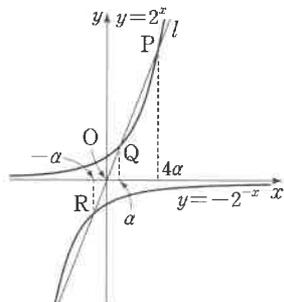
본문 34쪽

1 ④ 2 ③ 3 8

1 두 함수 $y=2^x$, $y=-2^{-x}$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 두 점 Q, R도 원점에 대하여 대칭이다.

또 $PQ : \overline{QR} = 3 : 2$ 이므로 점 Q의 x 좌표를 a ($a > 0$)으로 놓으면

$Q(a, 2^a)$, $R(-a, -2^a)$, $P(4a, 2^{4a})$



직선 OQ와 직선 OP의 기울기가 서로 같으므로

$$\frac{2^a - 0}{a - 0} = \frac{2^{4a} - 0}{4a - 0}$$

$a > 0$ 이므로

$$2^a \times 4 = 2^{4a}$$

$$2^{a+2} = 2^{4a}$$

$$4a = a + 2$$

따라서 $a = \frac{2}{3}$

답 ④

2 점 A의 좌표를 $(a, \log_2 a)$ ($a > 1$)이라 하면 점 B의 y 좌표는 $\log_2 a$ 이므로 점 B의 x 좌표는

$$\log_{\frac{1}{2}}(-x) = \log_2 a$$

$$-\log_2(-x) = \log_2 a$$

$$\log_2\left(-\frac{1}{x}\right) = \log_2 a$$

$$-\frac{1}{x} = a$$

$$x = -\frac{1}{a}$$

그러므로 점 B의 좌표는

$$\left(-\frac{1}{a}, \log_2 a\right)$$

한편, 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}}(-x)$ 는

$$y = \log_{\frac{1}{2}}(-x) = -\log_2(-x)$$

이므로 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}}(-x)$ 의 그래프는 함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 것이다.

그러므로 원점 O는 선분 BC의 중점이다.

이때 삼각형 ABC가 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 인 이등변삼각형이므로

$$\overline{OA} \perp \overline{OB}$$

두 직선 OA, OB가 서로 수직이므로

$$\frac{\log_2 a}{a} \times \frac{\log_2 a}{-\frac{1}{a}} = -1$$

$$(\log_2 a)^2 = 1$$

$$\log_2 a = 1 \text{ 또는 } \log_2 a = -1$$

$$a = 2 \text{ 또는 } a = \frac{1}{2}$$

이때 $a > 1$ 이므로

$$a = 2$$

따라서 $A(2, 1)$, $B\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ 이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{OA}$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \overline{OB} \times \overline{OA}$$

$$= \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} \times \sqrt{2^2 + 1^2}$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2} \times \sqrt{5}$$

$$= \frac{5}{2}$$

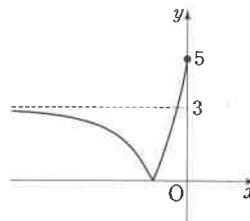
답 ③

3 $x \leq 0$ 일 때, 함수 $y = |2^{x+3} - 3|$ 의 그래프는 함수 $y = 2^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 후 x 축의 아랫부분의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 것이다. 이때 함수 $y = 2^{x+3} - 3$ 의 그래프의 점근선은 직선 $y = -3$ 이므로 함수 $y = |2^{x+3} - 3|$ 의 그래프의 점근선은 직선

$$y = 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또 $x = 0$ 일 때, $y = |2^3 - 3| = 5$ 이므로

함수 $y = |2^{x+3} - 3|$ ($x \leq 0$)의 그래프는 다음 그림과 같다.



한편, $3^{-x+2} - n = 3^{-(x-2)} - n$ 이므로 $x > 0$ 일 때,

함수 $y = 3^{-x+2} - n$ 의 그래프는 함수 $y = 3^x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 $-n$ 만큼 평행이동한 것이다.

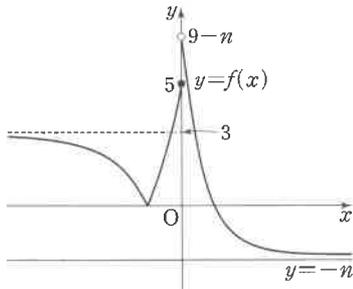
정답과 풀이

이때 함수 $y=3^{-(x-2)}-n$ 의 그래프의 점근선은 직선 $y=-n$ ㉔

또 $x=0$ 일 때, $y=9-n$ 이므로 함수 $y=3^{-(x-2)}-n$ 의 그래프는 점 $(0, 9-n)$ 을 지난다.

한편, 방정식 $f(x)=t$ 의 실근은 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=t$ 의 교점의 x 좌표이다.

이때 ㉓, ㉔과 함수 $y=|2^{x+3}-3|$ 의 그래프가 y 축과 만나는 점 $(0, 5)$ 를 이용하여 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 그리면 다음과 같다.



그러므로 조건을 만족시키기 위해서는 $9-n > 0$ 이어야 한다.

즉, $n < 9$

따라서 조건을 만족시키는 모든 자연수 n 의 값은 1, 2, 3, ..., 8이고 그 개수는 8이다.

답 8

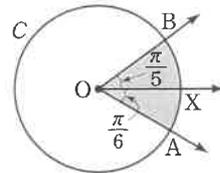
03 삼각함수

유제

본문 37~45쪽

1 6	2 ④	3 ②	4 4	5 3
6 12	7 ⑤	8 ②	9 2	10 ①

1 주어진 조건을 만족시키는 부채꼴 OAB는 그림의 색칠한 부분과 같다.



부채꼴 OAB의 중심각의 크기는

$$\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{6} = \frac{11}{30}\pi$$

반지름의 길이를 r ($r > 0$)이라 하면 부채꼴 OAB의 넓이가 $\frac{33}{5}\pi$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times r^2 \times \frac{11}{30}\pi = \frac{33}{5}\pi$$

$$r^2 = 36$$

따라서 $r = 6$

답 6

2 세 호 OA, OB, AB의 길이를 각각 l_1, l_2, l_3 이라 하자. 부채꼴 OAB의 반지름의 길이가 3, 즉 $\overline{OA} = \overline{OB} = 3$ 이므로

$$l_1 = l_2 = \frac{3}{2} \times \pi = \frac{3}{2}\pi$$

세 호 OA, OB, AB로 둘러싸인 도형의 둘레의 길이가 $\frac{14}{3}\pi$ 이므로

$$l_1 + l_2 + l_3 = \frac{3}{2}\pi + \frac{3}{2}\pi + l_3 = \frac{14}{3}\pi$$

$$l_3 = \frac{5}{3}\pi$$

따라서 부채꼴 OAB의 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{5}{3}\pi = \frac{5}{2}\pi$$

답 ④

- 3 $\sin \theta = \frac{3}{5} > 0$ 이므로 각 θ 는 제1사분면 또는 제2사분면의 각이다.

각 θ 가 제1사분면의 각이면

$$\cos \theta > 0, \tan \theta > 0 \text{에서 } \cos \theta + \tan \theta > 0 \text{이고,}$$

각 θ 가 제2사분면의 각이면

$$\cos \theta < 0, \tan \theta < 0 \text{에서 } \cos \theta + \tan \theta < 0 \text{이다.}$$

이때 $\cos \theta + \tan \theta < 0$ 이므로 각 θ 는 제2사분면의 각이고

$$\cos \theta = -\sqrt{1 - \sin^2 \theta} = -\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

따라서

$$\cos \theta - \tan \theta = -\frac{4}{5} - \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{20}$$

답 ②

- 4 $\sin \theta - \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 의 양변을 제곱하면

$$(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$1 - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$$

따라서

$$\begin{aligned} \tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\ &= \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{4}} \\ &= 4 \end{aligned}$$

답 4

- 5 $b > 0$ 이고 함수 $y = a \cos bx + ab$ 의 주기가 π 이므로

$$\frac{2\pi}{b} = \pi \text{에서 } b = 2$$

함수 $y = a \cos 2x + 2a$ 의 최댓값이 3이고 $a > 0$ 이므로

$$|a| + 2a = a + 2a = 3a = 3$$

$$a = 1$$

따라서

$$a + b = 1 + 2 = 3$$

답 3

- 6 $f(x) = a \tan 2x + b$ 라 하면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$ 을 지나므로

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{3}\right) &= a \tan \frac{2}{3}\pi + b \\ &= -\sqrt{3}a + b = 0 \end{aligned}$$

$$b = \sqrt{3}a$$

또한 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{2}, 3\right)$ 을 지나므로

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= a \tan \pi + b \\ &= a \times 0 + b \\ &= b = 3 \end{aligned}$$

따라서

$$a = \frac{b}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

이므로

$$a^2 + b^2 = (\sqrt{3})^2 + 3^2 = 12$$

답 12

- 7 $\sin(\pi - \theta) = \frac{3}{5}$ 에서 $\sin \theta = \frac{3}{5}$

이때 $\sin \theta > 0, \tan \theta < 0$ 에서 각 θ 는 제2사분면의 각이므로

$$\begin{aligned} \cos \theta &= -\sqrt{1 - \sin^2 \theta} \\ &= -\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} \\ &= -\frac{4}{5} \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right) &= \sin\left\{\pi + \left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\right\} \\ &= -\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \\ &= -\cos \theta \\ &= -\left(-\frac{4}{5}\right) \\ &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

답 ⑤

- 8 이차방정식 $x^2 + 2x \tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + \tan(\pi + \theta) = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

정답과 풀이

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= -2 \tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \\ &= -2 \times \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)} \\ &= -2 \times \frac{\cos \theta}{-\sin \theta} \\ &= \frac{2}{\tan \theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha\beta &= \tan(\pi + \theta) = \tan \theta \\ \text{이때 } (4\alpha - 1)(4\beta - 1) &= 1 \text{에서} \\ 16\alpha\beta - 4\alpha - 4\beta + 1 &= 1 \\ 4\alpha\beta &= \alpha + \beta \text{이므로} \\ 4 \tan \theta &= \frac{2}{\tan \theta} \\ \text{따라서} \\ \tan^2 \theta &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

답 ②

- 9 x 에 대한 이차방정식 $2x^2 + (2 \sin \theta)x + \sin \theta \cos \theta = 0$ 이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D=0$ 이어야 한다.

$$\frac{D}{4} = \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta = \sin \theta (\sin \theta - 2 \cos \theta) = 0$$

이때 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\sin \theta \neq 0$, $\cos \theta \neq 0$ 이므로

$$\sin \theta = 2 \cos \theta$$

따라서

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\ &= \frac{2 \cos \theta}{\cos \theta} \\ &= 2 \end{aligned}$$

답 2

- 10 $\cos^2 x + \left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \sin x > 1 + \sqrt{2}$ 에서
 $(1 - \sin^2 x) + \left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \sin x > 1 + \sqrt{2}$
 $\sin^2 x - \left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \sin x + \sqrt{2} < 0$
 $(\sin x - 2)\left(\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) < 0$
 이때 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 $\sin x - 2 < 0$ 이므로

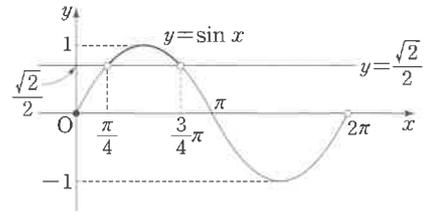
$$\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$$

$$\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

이 부등식의 해는 함수 $y = \sin x$ ($0 \leq x < 2\pi$)의 그래프가

직선 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 보다 위쪽에 있는 x 의 값의 범위이므로

$$\frac{\pi}{4} < x < \frac{3}{4}\pi$$



따라서 $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\beta = \frac{3}{4}\pi$ 이므로

$$\beta - \alpha = \frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

답 ①

Level

1 기초 연습

본문 46~47쪽

- | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1 4 | 2 ③ | 3 ① | 4 ③ | 5 ③ |
| 6 ③ | 7 ④ | 8 ⑤ | 9 ② | |

- 1 $400^\circ = a\pi$, $320^\circ = b\pi$ 이므로

$$400^\circ + 320^\circ = a\pi + b\pi$$

$$(a+b)\pi = 720^\circ$$

$$a+b = \frac{720}{\pi} \times 1^\circ$$

$$= \frac{720}{\pi} \times \frac{\pi}{180}$$

$$= 4$$

답 4

참고

$$a = \frac{400}{\pi} \times 1^\circ = \frac{400}{\pi} \times \frac{\pi}{180} = \frac{20}{9}$$

$$b = \frac{320}{\pi} \times 1^\circ = \frac{320}{\pi} \times \frac{\pi}{180} = \frac{16}{9}$$

- 2 부채꼴 OAB의 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$ 이고 반지름의 길이가 4이므로 직각삼각형 OAC에서

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OC}}$$

$$\overline{OC} = \frac{\overline{OA}}{\cos \frac{\pi}{3}} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8$$

두 호 AB, CD와 두 선분 AD, BC로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라 하면 S는 부채꼴 ODC의 넓이에서 부채꼴 OAB의 넓이를 뺀 것이다.

따라서

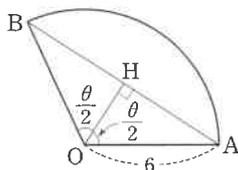
$$S = \frac{1}{2} \times \overline{OC}^2 \times \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \times \overline{OA}^2 \times \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{1}{2} \times 8^2 \times \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \times 4^2 \times \frac{\pi}{3}$$

$$= 8\pi$$

답 ③

3



부채꼴 OAB의 중심각의 크기를 θ , 호 AB의 길이를 l 이라 하면 부채꼴 OAB의 반지름의 길이가 6이므로

$$l = 6\theta$$

부채꼴 OAB의 둘레의 길이가 24이므로

$$\overline{OA} + \overline{OB} + \widehat{AB} = 24 \text{에서}$$

$$6 + 6 + 6\theta = 24$$

$$\theta = 2$$

점 O에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 OAB가 $\overline{OA} = \overline{OB}$ 인 이등변삼각형이므로

$$\angle AOH = \angle BOH = \frac{1}{2} \times (\angle AOB) = \frac{\theta}{2}$$

직각삼각형 OAH에서

$$\overline{AH} = \overline{OA} \sin \frac{\theta}{2} = 6 \sin 1$$

따라서

$$\overline{AB} = 2\overline{AH} = 2 \times 6 \sin 1 = 12 \sin 1$$

답 ①

- 4 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{3}$ 의 양변을 제곱하면

$$(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{9}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{9}$$

$$\sin \theta \cos \theta = -\frac{4}{9}$$

따라서

$$\sin^4 \theta + \cos^4 \theta = (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)^2 - 2(\sin \theta \cos \theta)^2$$

$$= 1^2 - 2 \times \left(-\frac{4}{9}\right)^2$$

$$= \frac{49}{81}$$

답 ③

- 5 $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$$\cos \frac{2}{3}\pi = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan \frac{7}{6}\pi = \tan \left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

따라서

$$\sin \frac{\pi}{6} \times \cos \frac{2}{3}\pi \times \tan \frac{7}{6}\pi$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{12}$$

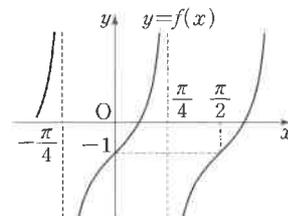
답 ③

- 6 ㄱ. $f(x) = 3 \tan(\pi + 2x) - 1 = 3 \tan 2x - 1$
이므로

$$f\left(\frac{\pi}{8}\right) = 3 \tan \frac{\pi}{4} - 1 = 3 \times 1 - 1 = 2 \text{ (참)}$$

ㄴ. 함수 $f(x) = 3 \tan 2x - 1$ 의 주기는 $\frac{\pi}{2}$ 이다. (거짓)

ㄷ. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 함수 $y = 3 \tan 2x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.



정답과 풀이

이때 함수 $y=3 \tan 2x$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 점 $(0, -1)$ 에 대하여 대칭이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

7 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{7}\right)=\cos\frac{\pi}{7}$

$\sin\left(\pi-\frac{\pi}{7}\right)=\sin\frac{\pi}{7}$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{7}\right)=\sin\frac{\pi}{7}$

$\cos\left(\pi-\frac{\pi}{7}\right)=-\cos\frac{\pi}{7}$

따라서

$$\left\{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{7}\right)+\sin\left(\pi-\frac{\pi}{7}\right)\right\}^2 + \left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{7}\right)+\cos\left(\pi-\frac{\pi}{7}\right)\right\}^2$$

$$= \left(\cos\frac{\pi}{7}+\sin\frac{\pi}{7}\right)^2 + \left(\sin\frac{\pi}{7}-\cos\frac{\pi}{7}\right)^2$$

$$= \left(\cos^2\frac{\pi}{7}+2\cos\frac{\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{\pi}{7}\right)$$

$$+ \left(\sin^2\frac{\pi}{7}-2\cos\frac{\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}+\cos^2\frac{\pi}{7}\right)$$

$$= 2\left(\cos^2\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{\pi}{7}\right)$$

$$= 2 \times 1$$

$$= 2$$

답 ④

8 $\log_2 \sin x + \log_2 (6 \sin x - 1) = 0 \dots\dots \textcircled{1}$

진수의 조건에서

$$\sin x > 0, 6 \sin x - 1 > 0$$

즉, $\sin x > \frac{1}{6}$

방정식 ①에서

$$\log_2 \sin x (6 \sin x - 1) = 0$$

$$\sin x (6 \sin x - 1) = 1$$

$$6 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$

$$(2 \sin x - 1)(3 \sin x + 1) = 0$$

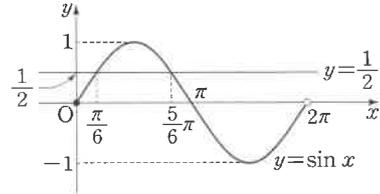
이때 $\sin x > \frac{1}{6}$ 에서 $3 \sin x + 1 > \frac{3}{2}$ 이므로

$$2 \sin x = 1$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 방정식 $\sin x = \frac{1}{2}$ 의 해는 함수 $y = \sin x$

의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{2}$ 이 만나는 점의 x 좌표이므로 $x = \frac{\pi}{6}$ 또는 $x = \frac{5}{6}\pi$ 이다.



따라서 구하는 모든 실수 x 의 값의 곱은

$$\frac{\pi}{6} \times \frac{5}{6}\pi = \frac{5}{36}\pi^2$$

답 ⑤

9 $f(x) = 2 \sin^2 x + \cos x - 1$
 $= 2(1 - \cos^2 x) + \cos x - 1$
 $= -2 \cos^2 x + \cos x + 1$

에서 $\cos x = t$ 라 하면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고

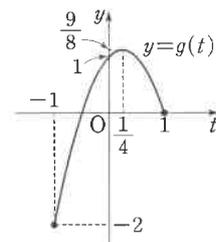
$$f(x) = -2t^2 + t + 1$$

$$= -2\left(t - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{9}{8} \quad (-1 \leq t \leq 1)$$

이때 $g(t) = -2\left(t - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{9}{8} \quad (-1 \leq t \leq 1)$ 이라 하면

함수 $g(t)$ 는 $t = \frac{1}{4}$ 일 때 최댓값 $\frac{9}{8}$ 를 갖고,

$t = -1$ 일 때 최솟값 -2 를 갖는다.



따라서 $M = \frac{9}{8}$, $m = -2$ 이므로

$$M - m = \frac{9}{8} - (-2) = \frac{25}{8}$$

답 ②

Level 2 기본 연습

분문 48~50쪽

- | | | | | |
|------|------|-----|-----|-------|
| 1 ② | 2 ③ | 3 ⑤ | 4 ④ | 5 ① |
| 6 ④ | 7 ② | 8 ② | 9 ② | 10 30 |
| 11 8 | 12 ② | | | |

1 n 이 두 자리의 자연수, 즉 $10 \leq n < 100$ 이므로

$$\frac{\pi}{2} < \frac{50}{n} \pi \leq 5\pi$$

이때 $\frac{50}{n} \pi$ 가 제2사분면의 각이려면

$$\frac{\pi}{2} < \frac{50}{n} \pi < \pi \quad \text{또는} \quad \frac{5}{2} \pi < \frac{50}{n} \pi < 3\pi \quad \text{또는}$$

$$\frac{9}{2} \pi < \frac{50}{n} \pi < 5\pi$$

이어야 한다.

$$\frac{\pi}{2} < \frac{50}{n} \pi < \pi \text{에서 } 50 < n < 100 \text{이므로}$$

n 의 값은 51, 52, 53, ..., 99이고 그 개수는 49이다.

$$\frac{5}{2} \pi < \frac{50}{n} \pi < 3\pi \text{에서 } \frac{50}{3} < n < 20 \text{이므로}$$

n 의 값은 17, 18, 19이고 그 개수는 3이다.

$$\frac{9}{2} \pi < \frac{50}{n} \pi < 5\pi \text{에서 } 10 < n < \frac{100}{9} \text{이므로}$$

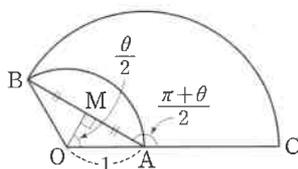
n 의 값은 11이고 그 개수는 1이다.

따라서 구하는 두 자리의 자연수 n 의 개수는

$$49 + 3 + 1 = 53$$

답 ②

2



선분 AB는 중심이 O이고 반지름의 길이가 \overline{OA} 인 원의 현이므로 점 O에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 M이라 하면 직선 OM은 선분 AB를 수직이등분한다.

$$\text{즉, } \angle AOM = \frac{1}{2} \times (\angle AOB) = \frac{\theta}{2}, \quad \angle AMO = \frac{\pi}{2} \text{이므로}$$

직각삼각형 OAM에서

$$\overline{AM} = \overline{OA} \sin \frac{\theta}{2}$$

$$= 1 \times \sin \frac{\theta}{2}$$

$$= \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\overline{AC} = \overline{AB} = 2\overline{AM} = 2 \sin \frac{\theta}{2}$$

이때

$$\angle BAC = \angle AMO + \angle AOM$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2} = \frac{\pi + \theta}{2}$$

이므로 부채꼴 ACB의 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times \overline{AB}^2 \times \frac{\pi + \theta}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(2 \sin \frac{\theta}{2}\right)^2 \times \frac{\pi + \theta}{2}$$

$$= (\pi + \theta) \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

이때 $S = \frac{3}{4}(\pi + \theta)$ 이므로

$$(\pi + \theta) \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{3}{4}(\pi + \theta) \text{에서}$$

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \text{에서 } \frac{\pi}{4} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2} \text{이고 } \sin \frac{\theta}{2} > 0 \text{이므로}$$

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{3}$$

$$\theta = \frac{2}{3}\pi$$

따라서

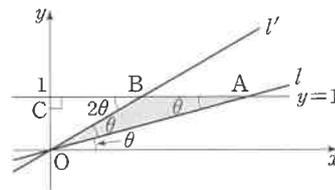
$$\sin \theta \cos \theta = \sin \frac{2}{3}\pi \cos \frac{2}{3}\pi$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

답 ③

3



$C(0, 1)$ 이라 하면 두 직선 l, l' 이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 각각 $\theta, 2\theta$ 이므로 평행선의 성질에 의하여 $\angle OAC = \theta, \angle OBC = 2\theta$

$\angle BOA = \angle OAB = \theta$ 에서 삼각형 OAB는 $\overline{OB} = \overline{AB}$ 인 이등변삼각형이다.

한편, 삼각형 OAB의 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{OC} = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times 1 = \frac{1}{2} \overline{AB}$$

이때 $S = 1$ 이므로

$$\frac{1}{2} \overline{AB} = 1 \text{에서}$$

$$\overline{AB} = \overline{OB} = 2$$

정답과 풀이

직각삼각형 OBC에서

$$\sin 2\theta = \frac{\overline{OC}}{\overline{OB}} = \frac{1}{2}$$

이때 $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$, 즉 $0 < 2\theta < \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\sin 2\theta = \frac{1}{2}$ 에서

$$2\theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\theta = \frac{\pi}{12}$$

따라서

$$\sin 6\theta = \sin \left(6 \times \frac{\pi}{12} \right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

답 ⑤

- 4 자연수 n 에 대하여 함수 $f(x) = \sin \frac{\pi}{n} x$ 의 주기는

$$\frac{2\pi}{\frac{\pi}{n}} = 2n, \text{ 즉 } 2\text{의 배수이다.}$$

이때 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+20) = f(x)$ 가 성립하려면 함수 $f(x)$ 의 주기가 20의 약수이어야 한다.

따라서 $2n$ 이 20의 약수가 되도록 하는 자연수 n 의 값은

1, 2, 5, 10

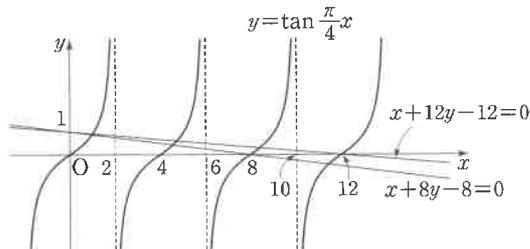
이므로 n 의 값의 합은

$$1+2+5+10=18$$

답 ④

- 5 함수 $y = \tan \frac{\pi}{4} x$ 의 주기는 $\frac{\pi}{\frac{\pi}{4}} = 4$ 이므로

함수 $y = \tan \frac{\pi}{4} x$ 의 그래프는 그림과 같다.



직선 $x + ny - n = 0$ 에서

$$x + n(y-1) = 0$$

이므로 직선 $x + ny - n = 0$ 은 n 의 값에 관계없이 항상 점 $(0, 1)$ 을 지난다.

이때 직선 $x + ny - n = 0$ 은 점 $(n, 0)$ 을 지나므로 직선

$x + ny - n = 0$ 과 함수 $y = \tan \frac{\pi}{4} x$ 의 그래프가 제1사분면

에서 만나는 점의 개수가 3이려면 $8 < n \leq 12$ 이어야 한다.

따라서 구하는 자연수 n 의 값은 9, 10, 11, 12이므로 그 합은

$$9+10+11+12=42$$

답 ①

- 6 $\frac{\pi}{6} < x < \frac{7}{6}\pi$ 에서 방정식 $|f(x)| = 4$ 의 근, 즉 함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프와 직선 $y = 4$ 가 만나는 점의 x 좌표를 a 라 하면

$$a - \frac{\pi}{6} = 2 \left(\frac{7}{6}\pi - a \right)$$

$$\text{이므로 } a = \frac{5}{6}\pi$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 주기는

$$a - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{2}{3}\pi$$

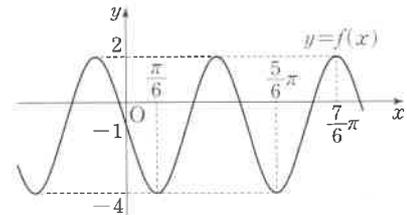
함수 $f(x) = a \sin bx + c$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{|b|}$ 이므로

$$\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2}{3}\pi$$

$$|b| = 3$$

한편, $|f(0)| = 1$ 에서 $|c| = 1$, 즉 $c = -1$ 또는 $c = 1$

(i) $c = -1$ 일 때



$f(x) = a \sin bx - 1$ 의 최댓값이 2이므로

$$|a| - 1 = 2, |a| = 3$$

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 함수 $y = -3 \sin 3x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이므로

$$f(x) = -3 \sin 3x - 1$$

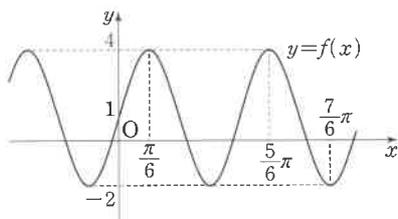
이때 $|a| = |b| = 3$ 이고 $-3 \sin 3x = 3 \sin(-3x)$ 이

므로

$$a = -3, b = 3 \text{ 또는 } a = 3, b = -3$$

따라서 $a + b = 0$ 이므로 $a + b + c$ 의 값은 -1 이다.

(ii) $c=1$ 일 때



$f(x) = a \sin bx + 1$ 의 최댓값이 4이므로
 $|a| + 1 = 4, |a| = 3$
 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 함수 $y=3 \sin 3x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로
 $f(x) = 3 \sin 3x + 1$
 이때 $|a| = |b| = 3$ 이고 $3 \sin 3x = -3 \sin(-3x)$ 이므로
 $a=b=3$ 또는 $a=b=-3$
 따라서 $a+b+c$ 의 값은 $3+3+1=7$ 또는 $-3+(-3)+1=-5$ 이다.

(i), (ii)에서 $a+b+c$ 의 최댓값과 최솟값은 각각 $M=7, m=-5$ 이므로
 $M-m=7-(-5)=12$

답 ④

7 $-1 \leq \sin b(x+\pi) \leq 1$ 이고, a, c 가 자연수이므로 함수 $f(x) = a \sin b(x+\pi) + c$ 의 최댓값과 최솟값은 각각 $a+c, -a+c$ 이다.

조건 (가)에 의하여

$a+c=7 \quad \dots \textcircled{A}$

$-a+c=-3 \quad \dots \textcircled{B}$

$\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 을 연립하여 풀면

$a=5, c=2$

함수 $f(x) = 5 \sin b(x+\pi) + 2$ 에서 조건 (나)에 의하여

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5 \sin \frac{3b}{2}\pi + 2 = 2$

$\sin \frac{3b}{2}\pi = 0 \quad \dots \textcircled{C}$

이때 자연수 b 가 홀수이면 $\sin \frac{3b}{2}\pi = -1$ 또는

$\sin \frac{3b}{2}\pi = 1$ 이고 b 가 짝수이면 $\sin \frac{3b}{2}\pi = 0$ 이다.

그러므로 \textcircled{C} 을 만족시키는 자연수 b 의 최솟값은 2이다.

따라서 $a+b+c$ 의 최솟값은 $a=5, b=2, c=2$ 일 때 9이다.

답 ②

8 함수 $f(x) = \sin \frac{\pi}{3}x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6$ 이고,

함수 $g(x) = \sin \frac{5}{3}\pi x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{5}{3}\pi} = \frac{6}{5}$ 이다.

모든 실수 x 에 대하여

$f(-x) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}x\right)$

$= -\sin \frac{\pi}{3}x$

$= -f(x)$

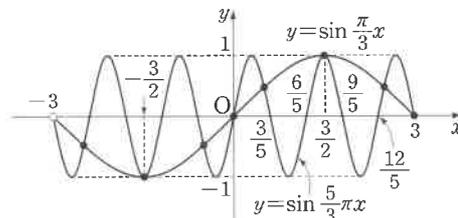
$g(-x) = \sin\left(-\frac{5}{3}\pi x\right)$

$= -\sin \frac{5}{3}\pi x$

$= -g(x)$

이므로 두 함수 $y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프는 모두 원점에 대하여 대칭이다.

따라서 $-3 < x \leq 3$ 에서 두 함수 $y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



$-3 < x \leq 3$ 에서 두 함수 $y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프는 그림과 같이 8개의 점에서 만나므로

$n=8$

8개의 점의 x 좌표를 작은 것부터 차례로 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_8$ 이라 하면

$-3 < x_1 < x_2 = -\frac{3}{2} < x_3 < x_4 = 0 < x_5$

$< x_6 = \frac{3}{2} < x_7 < x_8 = 3$

이때 두 함수 $y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프 모두 원점에 대하여 대칭이므로

$x_1 = -x_7, x_2 = -x_6 = -\frac{3}{2}, x_3 = -x_5$

따라서 8개의 점의 x 좌표의 합 S 는

$S = (x_1 + x_7) + (x_2 + x_6) + (x_3 + x_5) + x_4 + x_8$

$= 0 + 0 + 0 + 0 + 3$

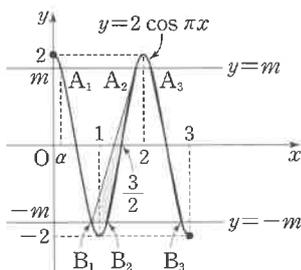
$= 3$

이므로

$n \times S = 8 \times 3 = 24$

답 ②

9



함수 $y = 2 \cos \pi x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi} = 2$ 이므로

$$\overline{A_1 A_3} = 2$$

함수 $y = 2 \cos \pi x$ 의 그래프는 점 $(\frac{3}{2}, 0)$ 에 대하여 대칭이고, 두 직선 $y = m$, $y = -m$ 은 x 축에 대하여 대칭이므로 점 A_1 과 점 B_3 , 점 A_2 와 점 B_2 , 점 A_3 과 점 B_1 은 각각 점 $(\frac{3}{2}, 0)$ 에 대하여 대칭이다.

$$\begin{aligned} \text{따라서 } \overline{A_1 A_2} &= \overline{B_2 B_3} \text{이므로} \\ \overline{A_2 A_3} + \overline{B_2 B_3} &= \overline{A_2 A_3} + \overline{A_1 A_2} \\ &= \overline{A_1 A_3} \\ &= 2 \end{aligned}$$

사각형 $A_2 B_2 B_3 A_3$ 의 넓이가 $2\sqrt{3}$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times (\overline{A_2 A_3} + \overline{B_2 B_3}) \times 2m &= \frac{1}{2} \times 2 \times 2m \\ &= 2m \\ &= 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$m = \sqrt{3}$$

점 A_1 의 x 좌표를 α ($0 < \alpha < \frac{1}{2}$)이라 하면

$$2 \cos \alpha\pi = \sqrt{3}$$

$$\cos \alpha\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0 < \alpha\pi < \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\alpha\pi = \frac{\pi}{6}$$

$$\alpha = \frac{1}{6}$$

따라서 삼각형 $A_2 B_1 B_2$ 의 넓이를 S 라 하면

$$\overline{B_1 B_2} = 2\alpha = 2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \text{이므로}$$

$$S = \frac{1}{2} \times \overline{B_1 B_2} \times 2m$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times 2\sqrt{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}$$

답 ②

10 등식 $|\sin(\frac{\pi}{3} + \theta)| = |\sin(\frac{n+2}{3}\pi - \theta)|$ 가 θ 에 대한

항등식이므로 θ 에 $\frac{2}{3}\pi + \theta$ 를 대입하면

$$|\sin(\pi + \theta)| = |\sin(\frac{n}{3}\pi - \theta)|$$

이때 $|\sin(\pi + \theta)| = |-\sin \theta| = |\sin \theta|$ 이므로

$$|\sin \theta| = |\sin(\frac{n}{3}\pi - \theta)| \quad \cdots \textcircled{1}$$

자연수 m 에 대하여 $\textcircled{1}$ 은 다음과 같다.

(i) $n = 3m - 2$ 일 때

$$\begin{aligned} |\sin(\frac{n}{3}\pi - \theta)| &= |\sin(\frac{3m-2}{3}\pi - \theta)| \\ &= |\sin\{m\pi - (\theta + \frac{2}{3}\pi)\}| \\ &= |\sin(\theta + \frac{2}{3}\pi)| \end{aligned}$$

이므로 $\textcircled{1}$ 에서

$$|\sin \theta| = |\sin(\theta + \frac{2}{3}\pi)|$$

이고 이 등식은 θ 에 대한 항등식이 아니다.

(ii) $n = 3m - 1$ 일 때

$$\begin{aligned} |\sin(\frac{n}{3}\pi - \theta)| &= |\sin(\frac{3m-1}{3}\pi - \theta)| \\ &= |\sin\{m\pi - (\theta + \frac{\pi}{3})\}| \\ &= |\sin(\theta + \frac{\pi}{3})| \end{aligned}$$

이므로 $\textcircled{1}$ 에서

$$|\sin \theta| = |\sin(\theta + \frac{\pi}{3})|$$

이고 이 등식은 θ 에 대한 항등식이 아니다.

(iii) $n = 3m$ 일 때

$$\begin{aligned} |\sin(\frac{n}{3}\pi - \theta)| &= |\sin(\frac{3m}{3}\pi - \theta)| \\ &= |\sin(m\pi - \theta)| \\ &= |\sin \theta| \end{aligned}$$

이므로 $\textcircled{1}$ 이 θ 의 값에 관계없이 항상 성립한다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 주어진 등식이 θ 에 대한 항등식이라면 $n = 3m$, 즉 n 은 3의 배수이어야 한다.

따라서 두 자리의 자연수 n 의 값은 12, 15, 18, ..., 99이고 그 개수는 30이다.

답 30

11 $f(x) = \sin 2x$, $g(x) = \pi \cos x$ 이므로

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$= f(\pi \cos x)$$

$$= \sin(2\pi \cos x)$$

방정식 $(f \circ g)(x) = 0$ 에서
 $\sin(2\pi \cos x) = 0 \dots\dots \textcircled{1}$
 이때 $n\pi < x < (n+1)\pi$ 에서
 $-1 < \cos x < 1$
 $-2\pi < 2\pi \cos x < 2\pi$ 이므로 방정식 $\textcircled{1}$ 의 근은
 $2\pi \cos x = -\pi$ 또는 $2\pi \cos x = 0$ 또는 $2\pi \cos x = \pi$
 즉, $\cos x = -\frac{1}{2}$ 또는 $\cos x = 0$ 또는 $\cos x = \frac{1}{2}$
 이때 $n\pi < x < (n+1)\pi$ 에서 세 방정식 $\cos x = -\frac{1}{2}$,
 $\cos x = 0$, $\cos x = \frac{1}{2}$ 의 근은 각각 하나씩 존재하고,
 방정식 $\cos x = 0$ 의 근은 $x = (n + \frac{1}{2})\pi$
 두 방정식 $\cos x = -\frac{1}{2}$, $\cos x = \frac{1}{2}$ 의 근을 각각 α , β 라
 하면
 $\frac{\alpha + \beta}{2} = (n + \frac{1}{2})\pi$
 $\alpha + \beta = 2(n + \frac{1}{2})\pi$
 $n\pi < x < (n+1)\pi$ 에서 방정식 $(f \circ g)(x) = 0$ 의 모든 실
 근은 $(n + \frac{1}{2})\pi$, α , β 이고, 그 합이 $\frac{51}{2}\pi$ 이므로
 $(n + \frac{1}{2})\pi + \alpha + \beta = (n + \frac{1}{2})\pi + 2(n + \frac{1}{2})\pi$
 $= 3(n + \frac{1}{2})\pi = \frac{51}{2}\pi$
 따라서 $n = 8$

답 8

12 모든 실수 x 에 대하여 부등식

$$x^2 + (2 \sin \theta)x - \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \geq 0$$

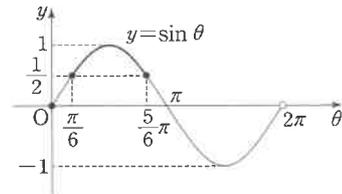
이 성립하려면 이차방정식

$x^2 + (2 \sin \theta)x - \cos^2 \theta + 2 \sin \theta = 0$ 의 판별식을 D 라 할
 때, $D \leq 0$ 이어야 한다.

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= \sin^2 \theta - (-\cos^2 \theta + 2 \sin \theta) \\ &= (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) - 2 \sin \theta \\ &= 1 - 2 \sin \theta \leq 0 \end{aligned}$$

$$\sin \theta \geq \frac{1}{2}$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{이므로 } \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5}{6}\pi$$



따라서 $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\beta = \frac{5}{6}\pi$ 이므로

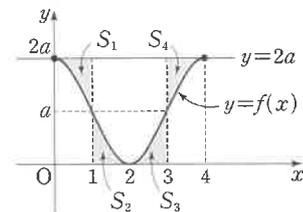
$$3(\beta - \alpha) = 3\left(\frac{5}{6}\pi - \frac{\pi}{6}\right) = 2\pi$$

답 ②

Level 3 실력 완성 본문 51쪽

1 ⑤ 2 ③ 3 7 4 ⑤

1 $a > 0$ 이므로 함수 $f(x) = a \cos \frac{\pi}{2}x + a$ 는 $x = 0$ 또는
 $x = 4$ 일 때 최댓값 $f(0) = f(4) = 2a$ 를 갖고, $x = 2$ 일 때 최
 소값 $f(2) = 0$ 을 갖는다.
 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



함수 $y = f(x)$ ($0 \leq x \leq 1$)의 그래프와 두 직선 $x = 1$,
 $y = 2a$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1 , 함수 $y = f(x)$ 의 그
 래프와 직선 $x = 1$ 및 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2 ,
 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $x = 3$ 및 x 축으로 둘러싸인
 부분의 넓이를 S_3 , 함수 $y = f(x)$ ($3 \leq x \leq 4$)의 그래프와
 두 직선 $x = 3$, $y = 2a$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_4 라 하자.
 두 점 $(0, 2a)$, $(2, 0)$ 은 점 $(1, a)$ 에 대하여 대칭이고, 함
 수 $y = f(x)$ ($0 \leq x \leq 2$)의 그래프도 점 $(1, a)$ 에 대하여 대
 칭이므로 $S_1 = S_2$
 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 직선 $x = 2$ 에 대하여 대칭이므로
 $S_1 = S_4$, $S_2 = S_3$
 따라서 $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$ 이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와
 직선 $y = 2a$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는 네 점 $(1, 0)$, $(3, 0)$,
 $(3, 2a)$, $(1, 2a)$ 를 꼭짓점으로 하는 직사각형의 넓이와
 같다. 이 넓이가 8이므로
 $2 \times 2a = 8$, $a = 2$

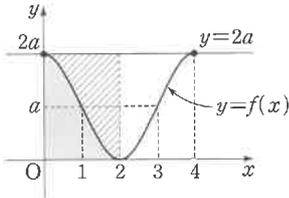
정답과 풀이

이때 $S_1=S_2$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이 S 는 네 점 $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 2a)$, $(0, 2a)$ 를 꼭짓점으로 하는 직사각형의 넓이와 같으므로
 $S=1 \times 2a=4$
 따라서 $a+S=2+4=6$

답 ⑤

다른 풀이

S 를 다음과 같이 구할 수도 있다.



넓이 S 는 함수 $y=f(x)$ ($0 \leq x \leq 2$)의 그래프와 두 직선 $x=2$, $y=2a$ 로 둘러싸인 부분의 넓이와 같고, 이것은 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=2a$ 로 둘러싸인 부분의 넓이의 $\frac{1}{2}$ 이므로
 $S=\frac{1}{2} \times 8=4$

$$\begin{aligned} 2 \quad \sin^2\left(\frac{11}{10}\pi - x\right) &= \sin^2\left\{\frac{\pi}{2} - \left(x - \frac{3}{5}\pi\right)\right\} \\ &= \cos^2\left(x - \frac{3}{5}\pi\right) \\ &= 1 - \sin^2\left(x - \frac{3}{5}\pi\right) \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin^2\left(\frac{11}{10}\pi - x\right) + \sin\left(x - \frac{3}{5}\pi\right) + k \\ &= \left[1 - \sin^2\left(x - \frac{3}{5}\pi\right)\right] + \sin\left(x - \frac{3}{5}\pi\right) + k \\ &= -\sin^2\left(x - \frac{3}{5}\pi\right) + \sin\left(x - \frac{3}{5}\pi\right) + k + 1 \end{aligned}$$

이때 $0 \leq x \leq \frac{5}{2}\pi$ 에서 $-1 \leq \sin\left(x - \frac{3}{5}\pi\right) \leq 1$

$\sin\left(x - \frac{3}{5}\pi\right) = t$ ($-1 \leq t \leq 1$)이라 하면

$$f(x) = -t^2 + t + k + 1 = -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + k + \frac{5}{4}$$

이므로 함수 $f(x)$ 는 $t = \frac{1}{2}$, 즉 $\sin\left(x - \frac{3}{5}\pi\right) = \frac{1}{2}$ 일 때 최댓값 $k + \frac{5}{4}$ 를 갖고, $t = -1$, 즉 $\sin\left(x - \frac{3}{5}\pi\right) = -1$ 일

때 최솟값 $k-1$ 을 갖는다.

함수 $f(x)$ 의 최솟값이 0이므로

$k-1=0$ 에서 $k=1$ 이고 함수 $f(x)$ 의 최댓값 M 은

$$M = k + \frac{5}{4} = 1 + \frac{5}{4} = \frac{9}{4}$$

한편, $0 \leq x \leq \frac{5}{2}\pi$ 에서 $-\frac{3}{5}\pi \leq x - \frac{3}{5}\pi \leq \frac{19}{10}\pi$ 이고 함수

$f(x)$ 가 $x = \alpha$ ($0 \leq \alpha \leq \frac{5}{2}\pi$)에서 최댓값을 가지므로

$$\sin\left(\alpha - \frac{3}{5}\pi\right) = \frac{1}{2}$$

$$\alpha - \frac{3}{5}\pi = \frac{\pi}{6} \quad \text{또는} \quad \alpha - \frac{3}{5}\pi = \frac{5}{6}\pi$$

$$\alpha = \frac{23}{30}\pi \quad \text{또는} \quad \alpha = \frac{43}{30}\pi$$

함수 $f(x)$ 가 $x = \beta$ ($0 \leq \beta \leq \frac{5}{2}\pi$)에서 최솟값을 가지므로

$$\sin\left(\beta - \frac{3}{5}\pi\right) = -1$$

$$\beta - \frac{3}{5}\pi = -\frac{\pi}{2} \quad \text{또는} \quad \beta - \frac{3}{5}\pi = \frac{3}{2}\pi$$

$$\beta = \frac{\pi}{10} \quad \text{또는} \quad \beta = \frac{21}{10}\pi$$

이때 $\frac{\alpha}{\beta}$ 의 값은 $\alpha = \frac{23}{30}\pi$, $\beta = \frac{21}{10}\pi$ 일 때 최소이므로

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{k}{M} \geq \frac{\frac{23}{30}\pi}{\frac{21}{10}\pi} + \frac{1}{\frac{9}{4}} = \frac{23}{63} + \frac{4}{9} = \frac{17}{21}$$

따라서 구하는 최솟값은 $\frac{17}{21}$ 이다.

답 ③

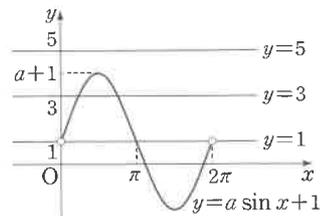
3 a, b 가 자연수이므로 $0 < x < 2\pi$ 에서

함수 $y = a \sin x + b$ 는 $x = \frac{\pi}{2}$ 에서 최댓값 $a+b$ 를 갖고,

$x = \frac{3}{2}\pi$ 에서 최솟값 $-a+b$ 를 갖는다.

b 의 값에 따라 $p+q+r=3$ 이 되도록 하는 10보다 작은 두 자연수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 는 다음과 같다.

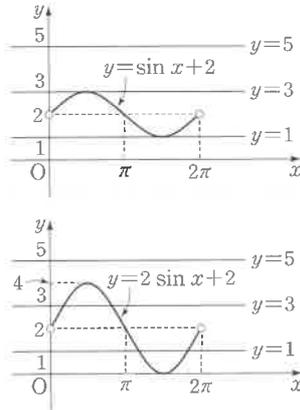
(i) $b=1$ 일 때



$p=1, q=2, r=0$, 즉 $a+b=a+1=4$ 이어야 하므로 $a=3$

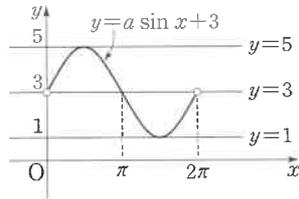
즉, 순서쌍 (a, b) 는 $(3, 1)$

(ii) $b=2$ 일 때



$a=1$ 이면 $p=1, q=1, r=0$ 이고
 $a \geq 2$ 이면 $p=2, q=2, r \geq 0$ 이므로
 $p+q+r=3$ 을 만족시키는 a 의 값이 존재하지 않는다.

(iii) $b=3$ 일 때

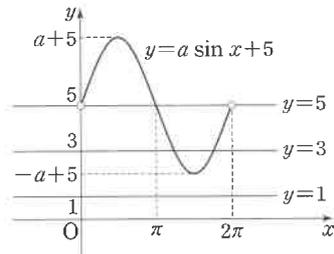


$p=q=r=1$, 즉 $a+b=a+3=5$ 이어야 하므로 $a=2$
 즉, 순서쌍 (a, b) 는 $(2, 3)$

(iv) $b=4$ 일 때

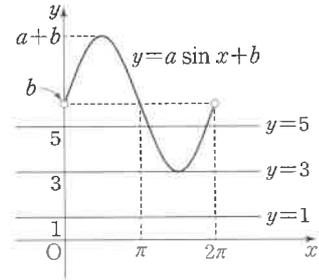
(ii)의 $b=2$ 일 때와 마찬가지로 조건을 만족시키는 a 의 값이 존재하지 않는다.

(v) $b=5$ 일 때



$p=0, q=2, r=1$, 즉 $-a+b=-a+5=2$ 이어야 하므로 $a=3$
 즉, 순서쌍 (a, b) 는 $(3, 5)$

(vi) $6 \leq b < 10$ 일 때



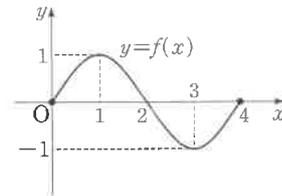
$p=0, q=1, r=2$, 즉 $-a+b=3$ 이어야 하므로 $a=b-3$ 이고 이를 만족시키는 순서쌍 (a, b) 는 $(3, 6), (4, 7), (5, 8), (6, 9)$

(i)~(vi)에 의하여 구하는 모든 순서쌍 (a, b) 는 $(3, 1), (2, 3), (3, 5), (3, 6), (4, 7), (5, 8), (6, 9)$ 이고 그 개수는 7이다.

답 7

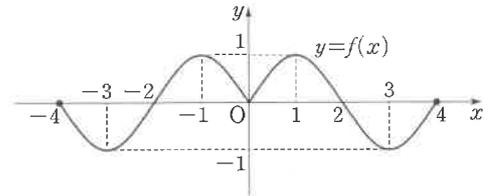
4 함수 $y = \sin \frac{\pi}{2}x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$ 이므로 $0 \leq x \leq 4$ 에서

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 [그림 1]과 같다.



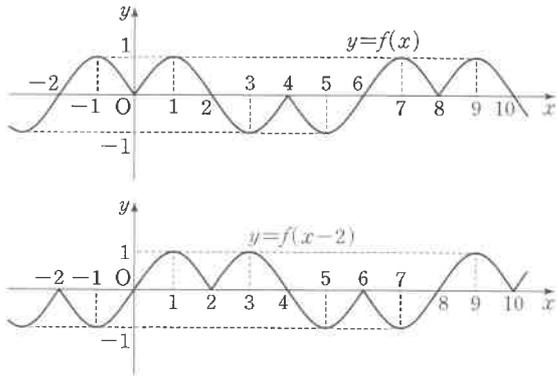
[그림 1]

모든 실수 x 에 대하여 $f(-x)=f(x)$, 즉 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이므로 $-4 \leq x \leq 4$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 [그림 2]와 같다.



[그림 2]

모든 실수 x 에 대하여 $f(x+8)=f(x)$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 함수 $y=f(x-2)$ 의 그래프는 [그림 3]과 같다.



[그림 3]

한편, 방정식 $|f(x)+f(x-2)|=2$ 에서
 $f(x)+f(x-2)=-2$ 또는 $f(x)+f(x-2)=2$
 이때 모든 실수 x 에 대하여 $-1 \leq f(x) \leq 1$ 이므로
 $f(x)=f(x-2)=-1$ 또는 $f(x)=f(x-2)=1$
 이어야 한다.

(i) $f(x)=f(x-2)=-1$ 일 때
 $0 \leq x \leq 8$ 에서 $f(x)=f(x-2)=-1$, 즉 두 함수
 $y=f(x)$, $y=f(x-2)$ 의 그래프가 직선 $y=-1$ 과 동
 시에 만나도록 하는 x 의 값은 5뿐이다.
 $2 < x < 20$ 에서 $f(x)=f(x-2)=-1$ 을 만족시키는 x
 의 값은 5, 13이다.

(ii) $f(x)=f(x-2)=1$ 일 때
 $0 \leq x \leq 8$ 에서 $f(x)=f(x-2)=1$, 즉 두 함수
 $y=f(x)$, $y=f(x-2)$ 의 그래프가 직선 $y=1$ 과 동시에
 만나도록 하는 x 의 값은 1뿐이다.
 $2 < x < 20$ 에서 $f(x)=f(x-2)=1$ 을 만족시키는 x 의
 값은 1, 9, 17이다.

(i), (ii)에 의하여 $0 < x < 20$ 일 때, 방정식
 $|f(x)+f(x-2)|=2$ 의 모든 근은 1, 5, 9, 13, 17이므로
 그 합은
 $1+5+9+13+17=45$

답 ⑤

04 사인법칙과 코사인법칙

유제

본문 55~61쪽

1 6	2 5	3 19	4 2	5 11
6 ⑤	7 ②			

1 삼각형 ABC의 세 내각의 크기의 합은 π 이므로
 $A+B+C=\pi$
 $A+B=\pi-C$

$$\sin(A+B) = \frac{1}{3} \text{에서}$$

$$\sin(A+B) = \sin(\pi-C) = \sin C = \frac{1}{3}$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 이라 하면 사
 인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AB}}{\sin C} = 2R$$

따라서

$$R = \frac{\overline{AB}}{2 \sin C} = \frac{4}{2 \times \frac{1}{3}} = 6$$

답 6

2 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R ($R > 0$)이라
 하면 조건 (나)에 의하여

$$\pi R^2 = 9\pi$$

$$R^2 = 9$$

$$R > 0 \text{이므로 } R = 3$$

$\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$ 라 하면 조건 (가)에 의하여

$$a+b+c=10$$

또한 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 3이므로 사
 인법칙에 의하여

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2 \times 3 = 6$$

따라서

$$\sin A = \frac{a}{6}, \sin B = \frac{b}{6}, \sin C = \frac{c}{6}$$

이므로

$$3(\sin A + \sin B + \sin C) = 3 \times \frac{a+b+c}{6} = 3 \times \frac{10}{6} = 5$$

답 5

3 직각이등변삼각형 ABM에서
 $\overline{AB} = \overline{BM} = a$ ($a > 0$)이라 하면
 $\overline{AM} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BM}^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a$
 점 M은 선분 BC의 중점이므로
 $\overline{CM} = \overline{BM} = a$
 $\overline{BC} = \overline{BM} + \overline{CM} = a + a = 2a$
 직각삼각형 ABC에서
 $\overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = \sqrt{5}a$
 삼각형 AMC에서 코사인법칙에 의하여
 $\overline{CM}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AM}^2 - 2 \times \overline{AC} \times \overline{AM} \times \cos(\angle CAM)$
 $a^2 = (\sqrt{5}a)^2 + (\sqrt{2}a)^2 - 2 \times \sqrt{5}a \times \sqrt{2}a \times \cos(\angle CAM)$
 $\cos(\angle CAM) = \frac{(\sqrt{5}a)^2 + (\sqrt{2}a)^2 - a^2}{2 \times \sqrt{5}a \times \sqrt{2}a}$
 $= \frac{6a^2}{2\sqrt{10}a^2} = \frac{3}{\sqrt{10}}$
 $\cos^2(\angle CAM) = \frac{9}{10}$
 따라서 $p=10$, $q=9$ 이므로
 $p+q=10+9=19$

답 19

4 $\overline{CA}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + 4\overline{CA}$ 에서
 $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 - 4\overline{CA}$ ㉠
 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여
 $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{CA} \times \cos A$ ㉡
 ㉠, ㉡에서
 $-4\overline{CA} = -2 \times \overline{AB} \times \overline{CA} \times \cos A$
 $\overline{AB} \cos A = 2$
 $\overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{AB}^2 + 8\overline{CA}$ 에서
 $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 - 8\overline{CA}$ ㉢
 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여
 $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 - 2 \times \overline{BC} \times \overline{CA} \times \cos C$ ㉣
 ㉢, ㉣에서
 $-8\overline{CA} = -2 \times \overline{BC} \times \overline{CA} \times \cos C$
 $\overline{BC} \cos C = 4$
 따라서
 $\frac{\overline{BC} \cos C}{\overline{AB} \cos A} = \frac{4}{2} = 2$

답 2

5 $\angle B = \frac{2}{3}\pi$ 에서 $\cos B = -\frac{1}{2}$ 이고, 코사인법칙에 의하여
 $\overline{CA}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{BC} \times \cos B$ 이므로
 $\cos B = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{CA}^2}{2 \times \overline{AB} \times \overline{BC}}$
 $= \frac{n^2 + (n+2)^2 - (n+4)^2}{2 \times n \times (n+2)}$
 $= \frac{(n+2)(n-6)}{2n(n+2)}$
 $= \frac{n-6}{2n} = -\frac{1}{2}$
 $n-6 = -n$
 $n=3$
 따라서 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=5$, $\overline{CA}=7$ 이므로 코사인법칙에 의
 하여
 $14 \cos A = 14 \times \frac{\overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 - \overline{BC}^2}{2 \times \overline{AB} \times \overline{CA}}$
 $= 14 \times \frac{3^2 + 7^2 - 5^2}{2 \times 3 \times 7}$
 $= 11$

답 11

참고

길이가 각각 n , $n+2$, $n+4$ 인 세 선분이 삼각형의 세 변이
 려면
 $n + (n+2) > n+4$, 즉 $n > 2$ 이어야 한다.

6 $\cos A \cos B \cos C = 0$ 에서
 $\cos A = 0$ 또는 $\cos B = 0$ 또는 $\cos C = 0$
 즉, 삼각형 ABC의 내각 중 하나는 직각이다.
 $(\cos A - \cos B)(\cos B - \cos C)(\cos C - \cos A) = 0$
 에서
 $\cos A = \cos B$ 또는 $\cos B = \cos C$ 또는 $\cos C = \cos A$
 즉, 삼각형 ABC의 내각 중 적어도 두 각의 크기가 서로
 같다.
 이때 삼각형 ABC의 한 내각이 직각이므로 삼각형 ABC는
 직각이등변삼각형이다.
 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 이라 하고
 $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$ 라 하면 사인법칙에 의하여
 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$
 $\sin A = \frac{a}{2R}$, $\sin B = \frac{b}{2R}$, $\sin C = \frac{c}{2R}$
 이므로 등식 $\sin A = k(\sin B - \sin C)$ 에서
 $\frac{a}{2R} = k\left(\frac{b}{2R} - \frac{c}{2R}\right)$

정답과 풀이

$$a = k(b - c) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편, 삼각형 ABC가 직각이등변삼각형이므로 세 변의 길이의 비는

$$a : b : c = 1 : 1 : \sqrt{2} \text{ 또는 } a : b : c = 1 : \sqrt{2} : 1$$

$$\text{또는 } a : b : c = \sqrt{2} : 1 : 1$$

이때 등식 ①이 성립하도록 하는 양수 k 가 존재하려면

$a : b : c = 1 : \sqrt{2} : 1$, 즉 $a = c$, $b = \sqrt{2}a$ 이어야 하므로 등식 ①에서

$$a = k(\sqrt{2}a - a)$$

$$k = \frac{a}{(\sqrt{2}-1)a} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} + 1$$

답 ⑤

7 삼각형 ABC의 넓이가 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \sin(\angle BAC)$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 3 \times \sin(\angle BAC)$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin(\angle BAC) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

이때 $\angle BAC > \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\angle BAC = \frac{2}{3}\pi$

$\angle BAC$ 의 이등분선이 선분 BC와 만나는 점이 P이므로

$$\angle PAB = \angle PAC = \frac{1}{2}(\angle BAC)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\pi$$

$$= \frac{\pi}{3}$$

삼각형 ABC의 넓이는 두 삼각형 PAB, PAC의 넓이의 합과 같으므로

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AP} \times \sin \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} \times \overline{AP} \times \overline{AC} \times \sin \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times \overline{AP} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times \overline{AP} \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \overline{AP} \times \frac{5\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

따라서

$$\overline{AP} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \times \frac{4}{5\sqrt{3}} = \frac{6}{5}$$

답 ②

Level

1 기초 연습

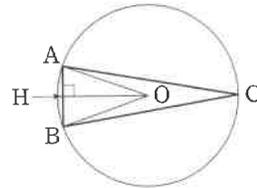
본문 62~63쪽

- | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1 ③ | 2 ② | 3 ② | 4 ④ | 5 ④ |
| 6 ③ | 7 ③ | 8 ① | | |

1 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 이라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AB}}{\sin C} = 2R$$

$$R = \frac{\overline{AB}}{2 \sin C} = \frac{2}{2 \times \frac{1}{3}} = 3$$



외접원의 중심 O에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 선분 AB의 중점이므로

$$\overline{AH} = \overline{BH} = \frac{1}{2} \overline{AB}$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

$\overline{OA} = 3$ 이므로 직각삼각형 OAH에서

$$\overline{OH} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AH}^2}$$

$$= \sqrt{3^2 - 1^2}$$

$$= 2\sqrt{2}$$

따라서 삼각형 OAB의 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{OH}$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2}$$

$$= 2\sqrt{2}$$

답 ③

2 직각삼각형 ABC에서

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 2^2} = \sqrt{6}$$

이므로

$$\sin C = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

점 M이 선분 BC의 중점이므로

$$\overline{BM} = \overline{CM} = \frac{1}{2} \overline{BC}$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

직각삼각형 ABM에서

$$\overline{AM} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BM}^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

삼각형 AMC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AM}}{\sin C} = 2R$$

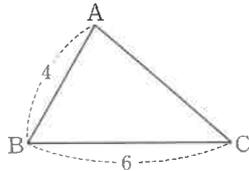
$$R = \frac{\overline{AM}}{2 \sin C} = \frac{\sqrt{3}}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3}{2}$$

따라서 삼각형 AMC의 외접원의 넓이는

$$\pi \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \pi$$

답 ②

3



삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{CA} \times \cos A$$

이때 $\overline{CA} = x$ ($x > 0$)이라 하면

$$6^2 = 4^2 + x^2 - 2 \times 4 \times x \times \frac{1}{8}$$

$$x^2 - x - 20 = 0$$

$$(x+4)(x-5) = 0$$

$x > 0$ 이므로 $x = 5$, 즉 $\overline{CA} = 5$

따라서

$$\begin{aligned} \cos B &= \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{CA}^2}{2 \times \overline{AB} \times \overline{BC}} \\ &= \frac{4^2 + 6^2 - 5^2}{2 \times 4 \times 6} \\ &= \frac{9}{16} \end{aligned}$$

답 ②

4 점 D는 길이가 6인 선분 BC를 2 : 1로 내분하는 점이므로

$$\overline{BD} = \frac{2}{3} \overline{BC} = \frac{2}{3} \times 6 = 4$$

$$\overline{CD} = \overline{BC} - \overline{BD} = 6 - 4 = 2$$

점 M이 선분 AC의 중점이므로

$$\overline{AM} = \overline{CM} = 3$$

$\angle ABD = \frac{\pi}{3}$ 이므로 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{BD} \times \cos \frac{\pi}{3}$$

$$= 6^2 + 4^2 - 2 \times 6 \times 4 \times \frac{1}{2} = 28$$

$$\overline{AD} = 2\sqrt{7}$$

또한 $\angle DCM = \frac{\pi}{3}$ 이므로 삼각형 MDC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{DM}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{CM}^2 - 2 \times \overline{CD} \times \overline{CM} \times \cos \frac{\pi}{3}$$

$$= 2^2 + 3^2 - 2 \times 2 \times 3 \times \frac{1}{2} = 7$$

$$\overline{DM} = \sqrt{7}$$

따라서

$$\overline{AD} \times \overline{DM} = 2\sqrt{7} \times \sqrt{7} = 14$$

답 ④

참고

선분 AD의 길이를 구한 후, 선분 DM의 길이는 다음과 같이 구할 수도 있다.

두 삼각형 ABD, MCD에서

$$\overline{AB} : \overline{MC} = \overline{BD} : \overline{CD} = 2 : 1$$

$$\angle ABD = \angle MCD = \frac{\pi}{3}$$

이므로 두 삼각형 ABD, MCD는 닮음비가 2 : 1인 서로 닮은 도형이다.

따라서

$$\overline{DM} = \frac{1}{2} \overline{AD} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{7} = \sqrt{7}$$

5 원 $x^2 + y^2 = 3$ 과 직선 $y = 1$ 이 만나는 점의 x좌표는

$$x^2 + 1 = 3 \text{에서 } x^2 = 2$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

즉, $A(\sqrt{2}, 1)$, $B(-\sqrt{2}, 1)$ 이다.

$\overline{OA} = \overline{OB} = \sqrt{3}$, $\overline{AB} = \sqrt{2} - (-\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$ 이므로 삼각형 AOB에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 - 2 \times \overline{OA} \times \overline{OB} \times \cos(\angle AOB)$$

$$\begin{aligned} \cos(\angle AOB) &= \frac{\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 - \overline{AB}^2}{2 \times \overline{OA} \times \overline{OB}} \\ &= \frac{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{2})^2}{2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}} \\ &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

정답과 풀이

따라서

$$\begin{aligned} \sin(\angle AOB) &= \sqrt{1 - \cos^2(\angle AOB)} \\ &= \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

다른 풀이

원 $x^2 + y^2 = 3$ 과 직선 $y = 1$ 이 만나는 점의 x 좌표는

$$x^2 + 1 = 3 \text{에서}$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

즉, $A(\sqrt{2}, 1)$, $B(-\sqrt{2}, 1)$ 이다.

$\overline{AB} = \sqrt{2} - (-\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$ 이므로 삼각형 AOB의 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 1 = \sqrt{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또한 $\overline{OA} = \overline{OB} = \sqrt{3}$ 이므로

$$S = \frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{OB} \times \sin(\angle AOB)$$

$$= \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sin(\angle AOB)$$

$$= \frac{3}{2} \sin(\angle AOB) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 에서

$$\frac{3}{2} \sin(\angle AOB) = \sqrt{2}$$

따라서

$$\sin(\angle AOB) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

답 ④

6 삼각형 ABD에서 $\angle ADB = \theta$ 라 하면 사각형 ABCD가 사다리꼴이므로 $\angle DBC = \theta$ 이다.

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos \theta = \frac{\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 - \overline{AB}^2}{2 \times \overline{AD} \times \overline{BD}}$$

$$= \frac{2^2 + 4^2 - 3^2}{2 \times 2 \times 4} = \frac{11}{16}$$

삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{CD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{BD}^2 - 2 \times \overline{BC} \times \overline{BD} \times \cos \theta$$

$$= 4^2 + 4^2 - 2 \times 4 \times 4 \times \frac{11}{16} = 10$$

따라서 $\overline{CD} = \sqrt{10}$

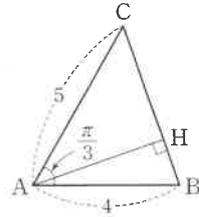
답 ③

7 삼각형 ABC의 넓이가 $5\sqrt{3}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \sin A = \frac{1}{2} \times 4 \times 5 \times \sin A = 5\sqrt{3}$$

$$\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

삼각형 ABC가 예각삼각형이므로 $\angle A = \frac{\pi}{3}$



삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \cos \frac{\pi}{3}$$

$$= 4^2 + 5^2 - 2 \times 4 \times 5 \times \frac{1}{2}$$

$$= 21$$

$$\overline{BC} = \sqrt{21}$$

이때 삼각형 ABC의 넓이가 $5\sqrt{3}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AH} = \frac{1}{2} \times \sqrt{21} \times \overline{AH} = 5\sqrt{3}$$

$$\overline{AH} = \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{21}} = \frac{10\sqrt{7}}{7}$$

따라서

$$\overline{AH}^2 = \left(\frac{10\sqrt{7}}{7}\right)^2 = \frac{100}{7}$$

답 ③

8 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 이라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AB}}{\sin C} = 2R$$

$$R = \frac{\overline{AB}}{2 \sin C} = \frac{3}{2 \sin \frac{\pi}{3}} = \sqrt{3}$$

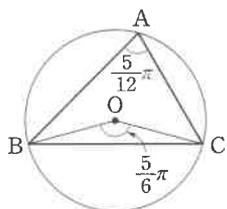
$$\angle A = \pi - (\angle B + \angle C)$$

$$= \pi - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \frac{5}{12}\pi$$

점 O가 삼각형 ABC의 외접원의 중심이므로 원주각과 중심각의 관계에 의하여

$$\angle BOC = 2 \times (\angle A) = 2 \times \frac{5}{12}\pi = \frac{5}{6}\pi$$



따라서 삼각형 OBC의 넓이를 S라 하면

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2} \times \overline{OB} \times \overline{OC} \times \sin \frac{5}{6}\pi \\
 &= \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \frac{1}{2} \\
 &= \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

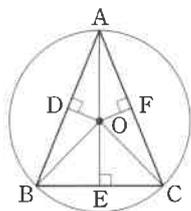
답 ①

Level

2 기본 연습 본문 64~66쪽

1 ③	2 ②	3 ③	4 ⑤	5 ②
6 ③	7 ④	8 ③	9 ③	

1



삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 3이므로

$$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = 3$$

세 점 D, E, F는 삼각형 ABC의 외접원의 중심 O에서 세 선분 AB, BC, CA에 내린 수선의 발이므로

$$\overline{AB} = 2\overline{AD}, \overline{BC} = 2\overline{BE}, \overline{AC} = 2\overline{AF}$$

이때 $\overline{OD} : \overline{OF} = 1 : 1$ 이므로 삼각형 ABC는 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 인 이등변삼각형이고, 세 점 A, O, E는 한 직선 위에 있다.

$$\overline{OD} : \overline{OE} : \overline{OF} = 1 : 2 : 1 \text{ 이므로}$$

$$\overline{OD} = \overline{OF} = h, \overline{OE} = 2h (h > 0) \text{ 이라 하면}$$

직각삼각형 OAD에서

$$\overline{AD}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{OD}^2 = 9 - h^2 \text{ 이므로}$$

$$\overline{AB}^2 = (2\overline{AD})^2 = 4(9 - h^2)$$

직각삼각형 OBE에서

$$\overline{BE}^2 = \overline{OB}^2 - \overline{OE}^2 = 9 - 4h^2$$

이때 $\overline{AE} = \overline{OA} + \overline{OE} = 3 + 2h$ 이므로 직각삼각형 ABE에서

$$\overline{AB}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{AE}^2$$

$$4(9 - h^2) = (9 - 4h^2) + (3 + 2h)^2$$

$$2h^2 + 6h - 9 = 0$$

$$h = \frac{-3 \pm 3\sqrt{3}}{2}$$

$h > 0$ 이므로

$$h = \frac{-3 + 3\sqrt{3}}{2}$$

한편,

$$\overline{BC}^2 = (2\overline{BE})^2$$

$$= 4(9 - 4h^2)$$

$$= 4 \left\{ 9 - 4 \times \left(\frac{-3 + 3\sqrt{3}}{2} \right)^2 \right\}$$

$$= 36(2\sqrt{3} - 3)$$

이므로 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin A} = 2 \times 3$$

$$\sin A = \frac{\overline{BC}}{6}$$

따라서

$$\sin^2 A = \frac{\overline{BC}^2}{36} = 2\sqrt{3} - 3$$

답 ③

2 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin A} = \frac{\overline{CA}}{\sin B} = 2R$$

이므로

$$\overline{BC} = 2R \sin A$$

$$\overline{CA} = 2R \sin B$$

$$\frac{\overline{BC} \times \overline{CA}}{R^2} = \frac{2R \sin A \times 2R \sin B}{R^2}$$

$$= 4 \sin A \sin B$$

조건 (나)의 $\sin A + \sin B = \frac{2\sqrt{10}}{5}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 A + \sin^2 B + 2 \sin A \sin B = \frac{8}{5} \quad \dots \textcircled{1}$$

이때 조건 (가)의 $\sin A = \cos B$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\cos^2 B + \sin^2 B + 2 \sin A \sin B = \frac{8}{5}$$

$$1 + 2 \sin A \sin B = \frac{8}{5}$$

정답과 풀이

$$\sin A \sin B = \frac{3}{10}$$

따라서

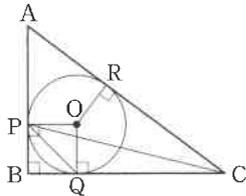
$$\begin{aligned} \frac{\overline{BC} \times \overline{CA}}{R^2} &= 4 \sin A \sin B \\ &= 4 \times \frac{3}{10} \\ &= \frac{6}{5} \end{aligned}$$

답 ②

- 3 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=4$, $\overline{CA}=5$ 에서 $\overline{CA}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$ 이므로 삼각형 ABC는 $\angle B = \frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형이다.

직각삼각형 ABC의 내접원의 중심을 O, 반지름의 길이를 r ($r > 0$)이라 하고, 직각삼각형 ABC의 내접원이 선분 AC와 만나는 점을 R이라 하면

$$\overline{OP} = \overline{OQ} = \overline{OR} = r$$



직각삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{r}{2} \times (\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}) = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BC}$$

이므로

$$\frac{r}{2} \times (3 + 4 + 5) = \frac{1}{2} \times 3 \times 4$$

$$r = 1$$

이때 사각형 OPBQ는 정사각형이므로

$$\overline{PB} = \overline{BQ} = r = 1$$

직각삼각형 PBQ에서

$$\overline{PQ} = \sqrt{\overline{PB}^2 + \overline{BQ}^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\text{이고 } \angle BQP = \frac{\pi}{4}$$

직각삼각형 PBC에서

$$\overline{PC} = \sqrt{\overline{PB}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$$

$$\text{또한 } \overline{CQ} = \overline{BC} - \overline{BQ} = 4 - 1 = 3$$

$$\sin(\angle QCP) = \sin(\angle BCP) = \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

삼각형 PQC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{CQ}}{\sin(\angle CPQ)} = \frac{\overline{PQ}}{\sin(\angle QCP)}$$

$$\frac{3}{\sin(\angle CPQ)} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{\sqrt{17}}}$$

$$\sin(\angle CPQ) = \frac{3}{\sqrt{34}}$$

이므로

$$\begin{aligned} \sin(\angle CPQ) \times \sin(\angle QCP) &= \frac{3}{\sqrt{34}} \times \frac{1}{\sqrt{17}} \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{34} \end{aligned}$$

답 ③

- 4 조건 (가)의 $\sin A = \sin C$ 를 만족시키려면 $A = C$ 또는 $A = \pi - C$ 이어야 한다. 이때 $A = \pi - C$, 즉 $A + C = \pi$ 이면 $B = 0$ 이 되어 삼각형 ABC가 될 수 없다.

따라서 $A = C$

$A = C$ 를 조건 (나)의 $\cos A + 2 \cos B = 3 \cos C$ 에 대입하면

$$\cos A + 2 \cos B = 3 \cos A$$

$$\cos A = \cos B$$

$$A = B$$

따라서 세 내각의 크기가 모두 같으므로 삼각형 ABC는 정삼각형이고, $A = B = C = \frac{\pi}{3}$ 이다.

정삼각형 ABC의 한 변의 길이를 a ($a > 0$)이라 하면 이 삼각형의 넓이가 12이므로

$$\frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = 12$$

$$a^2 = 16\sqrt{3}$$

정삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 이라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$

$$R = \frac{a}{2 \sin \frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} a$$

따라서 삼각형 ABC의 외접원의 넓이를 S 라 하면

$$S = \pi R^2$$

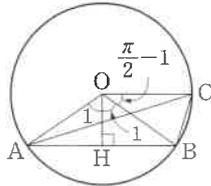
$$= \pi \times \left(\frac{\sqrt{3}}{3} a \right)^2$$

$$= \frac{\pi}{3} a^2$$

$$= \frac{16\sqrt{3}}{3} \pi$$

답 ⑤

- 5 주어진 원의 반지름의 길이가 2이므로
 $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = 2$
 이때 삼각형 OAB에서 $\angle AOB = \theta$ 라 하면 점 C를 포함하
 지 않는 호 AB의 길이가 4이므로
 $2\theta = 4, \theta = 2$



삼각형 OAB가 이등변삼각형이므로 점 O에서 선분 AB에
 내린 수선의 발을 H라 하면 직선 OH는 선분 AB를 수직이
 등분하고

$$\angle AOH = \angle BOH = \frac{1}{2} \times (\angle AOB) = 1$$

직각삼각형 OAH에서

$$\sin 1 = \frac{\overline{AH}}{\overline{OA}}$$

$$\overline{AH} = \overline{OA} \sin 1 = 2 \sin 1$$

$$\overline{AB} = 2\overline{AH} = 4 \sin 1$$

한편, 두 직선 AB, OC가 평행하고 $\overline{OH} \perp \overline{AB}$ 이므로

$$\angle AOC = \angle AOH + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 1$$

$$\angle BOC = \frac{\pi}{2} - \angle BOH = \frac{\pi}{2} - 1$$

삼각형 OAC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OC}^2 - 2 \times \overline{OA} \times \overline{OC} \times \cos \left(\frac{\pi}{2} + 1 \right)$$

$$= 2^2 + 2^2 - 2 \times 2 \times 2 \times \sin 1$$

$$= 8(1 + \sin 1)$$

삼각형 OBC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 - 2 \times \overline{OB} \times \overline{OC} \times \cos \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right)$$

$$= 2^2 + 2^2 - 2 \times 2 \times 2 \times \sin 1$$

$$= 8(1 - \sin 1)$$

따라서

$$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2 \times \overline{BC}^2} = \frac{(4 \sin 1)^2}{8(1 + \sin 1) \times 8(1 - \sin 1)}$$

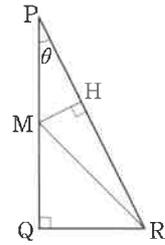
$$= \frac{\sin^2 1}{4(1 - \sin^2 1)}$$

$$= \frac{\sin^2 1}{4 \cos^2 1}$$

$$= \frac{1}{4} \tan^2 1$$

답 ②

6



직각삼각형 PQR에서 $\overline{PQ} = 2a (a > 0)$ 이라 하면 점 M이
 선분 PQ의 중점이므로

$$\overline{PM} = \overline{MQ} = \overline{QR} = a$$

$$\overline{PR} = \sqrt{\overline{PQ}^2 + \overline{QR}^2}$$

$$= \sqrt{(2a)^2 + a^2}$$

$$= \sqrt{5}a$$

$$\overline{MR} = \sqrt{\overline{MQ}^2 + \overline{QR}^2}$$

$$= \sqrt{a^2 + a^2}$$

$$= \sqrt{2}a$$

삼각형 PQR에서 $\angle QPR = \theta$ 라 하면

$$\sin \theta = \frac{\overline{QR}}{\overline{PR}} = \frac{a}{\sqrt{5}a} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

삼각형 PMR의 외접원의 넓이가 50π 이므로 외접원의 반지
 림의 길이는 $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ 이다.

삼각형 PMR에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{MR}}{\sin \theta} = 10\sqrt{2}$$

$$\overline{MR} = 10\sqrt{2} \sin \theta$$

$$\sqrt{2}a = 10\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$a = 2\sqrt{5}$$

따라서

$$\overline{MH} = \overline{PM} \sin \theta = 2\sqrt{5} \times \frac{\sqrt{5}}{5} = 2$$

답 ③

- 7 원주각의 성질에 의하여 $\angle ABD = \angle ACD = \frac{\pi}{3}$

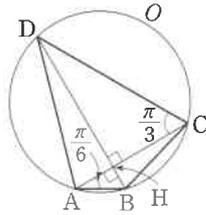
두 선분 AC, BD가 만나는 점을 H라 하면 삼각형 ABH에
 서

$$\angle AHB = \pi - (\angle CAB + \angle ABD)$$

$$= \pi - \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} \right)$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

이므로 두 직선 AC, BD는 수직으로 만난다.



$\overline{AB}=2$ 이므로 직각삼각형 ABH에서

$$\begin{aligned}\overline{BH} &= \overline{AB} \sin \frac{\pi}{6} \\ &= 2 \times \frac{1}{2} \\ &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{AH} &= \overline{AB} \cos \frac{\pi}{6} \\ &= 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \sqrt{3}\end{aligned}$$

$\overline{CH}=a$ ($a>0$)이라 하면

$$\overline{AC} = \overline{AH} + \overline{CH} = \sqrt{3} + a$$

이고 직각삼각형 CDH에서

$$\overline{CD} = \frac{\overline{CH}}{\cos \frac{\pi}{3}} = 2a$$

사각형 ABCD의 넓이를 S라 하면 S는 두 삼각형 ABC, ACD의 넓이의 합과 같으므로

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \sin \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{CD} \times \sin \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \times (\sqrt{3} + a) \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times (\sqrt{3} + a) \times 2a \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{4a + (a^2 + 1)\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

이때 $S = \frac{21\sqrt{3}}{2}$ 이므로

$$\frac{4a + (a^2 + 1)\sqrt{3}}{2} = \frac{21\sqrt{3}}{2}$$

$$\sqrt{3}a^2 + 4a - 20\sqrt{3} = 0$$

$$(\sqrt{3}a + 10)(a - 2\sqrt{3}) = 0$$

$\sqrt{3}a + 10 > 0$ 이므로

$$a = 2\sqrt{3}$$

즉, $\overline{CH} = 2\sqrt{3}$

직각삼각형 BCH에서

$$\begin{aligned}\overline{BC} &= \sqrt{\overline{BH}^2 + \overline{CH}^2} \\ &= \sqrt{1^2 + (2\sqrt{3})^2} \\ &= \sqrt{13}\end{aligned}$$

원 O의 반지름의 길이를 R이라 하면 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin(\angle CAB)} = 2R$$

$$R = \frac{\overline{BC}}{2 \sin(\angle CAB)}$$

$$= \frac{\sqrt{13}}{2 \sin \frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{\sqrt{13}}{2 \times \frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{13}$$

따라서 원 O의 넓이는

$$\pi \times R^2 = \pi \times (\sqrt{13})^2 = 13\pi$$

답 ④

다른 풀이

$$\overline{BH}=1, \overline{AH}=\sqrt{3} \text{을 구한 후 } \frac{4a + (a^2 + 1)\sqrt{3}}{2} = \frac{21\sqrt{3}}{2} \text{을}$$

다음과 같이 유도할 수도 있다.

$\overline{CH}=a$ ($a>0$)이라 하면 직각삼각형 CDH에서

$$\overline{DH} = \overline{CH} \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}a \text{이고}$$

$$\overline{AC} = \overline{AH} + \overline{CH} = \sqrt{3} + a$$

$$\overline{BD} = \overline{BH} + \overline{DH} = 1 + \sqrt{3}a$$

한편, $\sin(\angle AHB) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$ 이고 사각형 ABCD의

넓이가 $\frac{21\sqrt{3}}{2}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{BD} \times \sin(\angle AHB)$$

$$= \frac{1}{2} \times (\sqrt{3} + a) \times (1 + \sqrt{3}a) \times 1$$

$$= \frac{4a + (a^2 + 1)\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{21\sqrt{3}}{2}$$

8 직각삼각형 ABC에서

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

이므로

$$\cos A = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{3}{5}$$

$$\sin A = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{4}{5}$$

선분 AB를 1 : m으로 내분하는 점이 P이므로

$$\overline{AP} = \frac{\overline{AB}}{m+1} = \frac{3}{m+1}$$

선분 CA를 1 : m으로 내분하는 점이 Q이므로

$$\overline{AQ} = \frac{m\overline{AC}}{m+1} = \frac{5m}{m+1}$$

$\overline{PQ} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$ 이므로 삼각형 APQ에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{PQ}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{AQ}^2 - 2 \times \overline{AP} \times \overline{AQ} \times \cos A$$

$$\left(\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{m+1}\right)^2 + \left(\frac{5m}{m+1}\right)^2 - 2 \times \frac{3}{m+1} \times \frac{5m}{m+1} \times \frac{3}{5}$$

$$\frac{45}{4} = \frac{25m^2 - 18m + 9}{(m+1)^2}$$

$$45(m+1)^2 = 4(25m^2 - 18m + 9)$$

$$55m^2 - 162m - 9 = 0$$

$$(m-3)(55m+3) = 0$$

$$55m+3 > 0 \text{ 이므로}$$

$$m = 3$$

따라서 $\overline{AP} = \frac{3}{4}$, $\overline{AQ} = \frac{15}{4}$ 이므로 삼각형 APQ의 넓이를

S라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times \overline{AP} \times \overline{AQ} \times \sin A$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{15}{4} \times \frac{4}{5}$$

$$= \frac{9}{8}$$

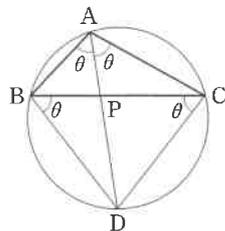
답 ③

9 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 - \overline{BC}^2}{2 \times \overline{AB} \times \overline{CA}}$$

$$= \frac{2^2 + 3^2 - 4^2}{2 \times 2 \times 3}$$

$$= -\frac{1}{4}$$



$\angle BAD = \angle DAC = \theta$ 라 하면 원주각의 성질에 의하여 $\angle DBC = \angle DCB = \theta$ 이므로 삼각형 BDC는 $\overline{BD} = \overline{CD}$ 인 이등변삼각형이다.

$\cos(\angle BDC) = \cos(\pi - A) = -\cos A = \frac{1}{4}$ 이므로

$\overline{BD} = \overline{CD} = a$ ($a > 0$)이라 하면 삼각형 BDC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 - 2 \times \overline{BD} \times \overline{CD} \times \cos(\angle BDC)$$

$$4^2 = a^2 + a^2 - 2 \times a \times a \times \frac{1}{4}$$

$$a^2 = \frac{32}{3}$$

$a > 0$ 이므로

$$a = \frac{4\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{즉, } \overline{BD} = \overline{CD} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$$

한편,

$$\sin(\angle BDC) = \sqrt{1 - \cos^2(\angle BDC)}$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{15}}{4}$$

따라서 삼각형 BDC의 넓이를 S라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times \overline{BD} \times \overline{CD} \times \sin(\angle BDC)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{4\sqrt{6}}{3} \times \frac{4\sqrt{6}}{3} \times \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$= \frac{4\sqrt{15}}{3}$$

답 ③

Level 3 실력 완성 본문 67쪽

1 ⑤ 2 ③ 3 ④

1 ㄱ. 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 - 2 \times \overline{BC} \times \overline{CA} \times \cos C$$

$$= (3\sqrt{2})^2 + (\sqrt{10})^2 - 2 \times 3\sqrt{2} \times \sqrt{10} \times \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$= 4$$

이므로

$$\overline{AB} = 2 \text{ (참)}$$

그러므로

$$\overline{BC} = \overline{BH} + \overline{CH}$$

$$= \frac{4\sqrt{5}}{5} + \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

$$= 2\sqrt{5}$$

이때 두 삼각형 ABH, CBD가 서로 닮음이므로

$$\overline{AB} : \overline{AH} = \overline{CB} : \overline{CD}$$

즉, $2 : \frac{2\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5} : \overline{CD}$

$$\overline{CD} = 2$$

 직각삼각형 ACD에서

$$\overline{AD} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{CD}^2}$$

$$= \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - 2^2}$$

$$= 2$$

따라서 삼각형 ACD는 $\overline{AD} = \overline{CD}$ 인 직각이등변삼각형이므로 $\angle ACD = \angle DAC = \frac{\pi}{4}$ 이다.

이때 $\angle BAE = \angle DAC = \frac{\pi}{4}$ 이므로 삼각형 AEB도 직각이등변삼각형이고

$$\overline{AE} = \overline{BE} = \frac{\overline{AB}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

한편, $\angle CDB = \angle CEB = \frac{\pi}{2}$ 이므로 삼각형 BCD의 외접원은 점 E를 지나고, 원주각의 성질에 의하여 $\angle CBD = \angle CED$, $\angle BCE = \angle BDE$

두 삼각형 ABC, AED가 서로 닮음이므로

$$\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{AE} : \overline{DE}$$

즉, $2 : 2\sqrt{5} = \sqrt{2} : \overline{DE}$

$$\overline{DE} = \sqrt{10}$$

또한 삼각형 CFE에서 $\angle ECF = \frac{\pi}{4}$, $\angle CEF = \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\angle DFE = \frac{\pi}{4}$$

따라서 삼각형 DFE의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 사인법칙에 의하여

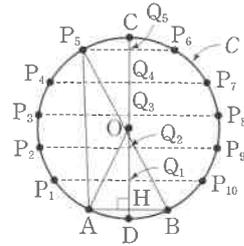
$$\frac{\overline{DE}}{\sin(\angle DFE)} = 2R$$

$$R = \frac{\sqrt{10}}{2 \sin \frac{\pi}{4}} = \sqrt{5}$$

이므로 구하는 외접원의 넓이는

$$\pi \times R^2 = 5\pi$$

3



원 C의 중심을 O라 하고 점 O에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 직선 OH는 선분 AB를 수직이등분하므로

$$\overline{AH} = \frac{1}{2} \overline{AB} = \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

$\overline{OA} = 3$ 이므로 직각삼각형 OAH에서

$$\overline{OH} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AH}^2}$$

$$= \sqrt{3^2 - 1^2}$$

$$= 2\sqrt{2}$$

원 C와 직선 OH가 만나는 두 점을 C, D ($\overline{DH} < \overline{CH}$)라 하면

$$\overline{CH} = \overline{OC} + \overline{OH} = 3 + 2\sqrt{2}$$

$$\overline{DH} = \overline{OD} - \overline{OH} = 3 - 2\sqrt{2}$$

이때 $2 < 2\sqrt{2} < 3$ 이므로

$$5 < \overline{CH} < 6, 0 < \overline{DH} < 1 \quad \dots \ominus$$

한편, 원 C 위의 점 P에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H1이라 하고 삼각형 PAB의 넓이를 S라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{PH_1}$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times \overline{PH_1}$$

$$= \overline{PH_1}$$

이므로 삼각형 PAB의 넓이가 자연수이려면 $\overline{PH_1}$, 즉 점 P와 직선 AB 사이의 거리가 자연수이어야 한다.

⊖에 의하여 선분 CH 위에 $\overline{HQ_1} = 1, \overline{HQ_2} = 2, \overline{HQ_3} = 3, \overline{HQ_4} = 4, \overline{HQ_5} = 5$ 인 다섯 개의 점 Q1, Q2, Q3, Q4, Q5를 잡고, 선분 CD에 수직이며 점 Qi (i=1, 2, 3, 4, 5)를 지나는 직선과 원 C의 교점을 고려하면 열 개의 점 P1, P2, P3, ..., P10이 존재한다. 이때 두 점 P1과 P10, 두 점 P2와 P9, 두 점 P3과 P8, 두 점 P4와 P7, 두 점 P5와 P6은 모두 직선 CH에 대하여 대칭이고, 두 점 A, B도 직선 CH에 대하여 대칭이므로 $\overline{AP_6} = \overline{BP_5}$ 이다.

원 C의 반지름의 길이가 3이므로 삼각형 P5AB에서 $\angle AP_5B = \theta$ 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AB}}{\sin \theta} = 2 \times 3$$



$$\sin \theta = \frac{\overline{AB}}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

삼각형 P_5AB 는 밑변의 길이가 $\overline{AB}=2$, 높이가 5이므로 삼각형 P_5AB 의 넓이는 5이다.

따라서

$$\frac{1}{2} \times \overline{AP_5} \times \overline{BP_5} \times \sin \theta = 5$$

$$\overline{AP_5} \times \overline{BP_5} = \frac{10}{\sin \theta} = \frac{10}{\frac{1}{3}} = 30$$

또한

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

이므로 삼각형 P_5AB 에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 &= \overline{AP_5}^2 + \overline{BP_5}^2 - 2 \times \overline{AP_5} \times \overline{BP_5} \times \cos \theta \\ \overline{AP_5}^2 + \overline{BP_5}^2 &= \overline{AB}^2 + 2 \times (\overline{AP_5} \times \overline{BP_5}) \times \cos \theta \\ &= 2^2 + 2 \times 30 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ &= 4 + 40\sqrt{2} \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} (\overline{AP_5} + \overline{BP_5})^2 &= (\overline{AP_5}^2 + \overline{BP_5}^2) \\ &= \overline{AP_5}^2 + \overline{BP_5}^2 + 2 \times \overline{AP_5} \times \overline{BP_5} \\ &= (4 + 40\sqrt{2}) + 2 \times 30 \\ &= 64 + 40\sqrt{2} \end{aligned}$$

답 ④

05 등차수열과 등비수열

유제

본문 71~77쪽

1 ④	2 84	3 152	4 ③	5 ③
6 ⑤	7 384	8 242		

1 $a_3 + a_6 = 3 \dots\dots ㉠$

$a_6 + a_9 = 17 \dots\dots ㉡$

㉡에서 ㉠을 빼면

$$a_9 - a_3 = 14$$

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_9 - a_3 = 6d = 14$$

이므로

$$d = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$$

㉠에서

$$\begin{aligned} a_3 + a_6 &= (a_1 + 2d) + (a_1 + 5d) \\ &= 2a_1 + 7d \\ &= 2a_1 + \frac{49}{3} \\ &= 3 \end{aligned}$$

이므로

$$2a_1 = 3 - \frac{49}{3} = -\frac{40}{3}$$

$$a_1 = -\frac{20}{3}$$

따라서

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{20}{3} + (n-1) \times \frac{7}{3} \\ &= \frac{7n-27}{3} \end{aligned}$$

이고,

$$\frac{7n-27}{3} > 100$$

에서

$$7n > 327$$

즉, $n > \frac{327}{7} = 46 + \frac{5}{7}$ 이므로 조건을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값은 47이다.

답 ④

2 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차가 -3 이고, 모든 항이 정수이므로 $a_n = -3n + k$ (k 는 정수)

로 놓을 수 있다.

조건 (나)에 의하여

$$a_{19} \geq 0, a_{20} < 0$$

이므로

$$-3 \times 19 + k \geq 0, -3 \times 20 + k < 0$$

에서

$$57 \leq k < 60$$

k 는 정수이므로

$$k=57 \text{ 또는 } k=58 \text{ 또는 } k=59$$

이때

$$a_{10} = -30 + k$$

이므로

$$a_{10} = 27 \text{ 또는 } a_{10} = 28 \text{ 또는 } a_{10} = 29$$

따라서 조건을 만족시키는 모든 a_{10} 의 값의 합은

$$27 + 28 + 29 = 84$$

답 84

3 수열 $\{a_n\}$ 이 등차수열이므로

$$S_{19} = \frac{19(a_1 + a_{19})}{2}$$

한편, a_1 과 a_{19} 의 등차중항이 a_{10} 이므로

$$a_1 + a_{19} = 2a_{10} = 2 \times 8 = 16$$

따라서

$$S_{19} = \frac{19 \times 16}{2} = 152$$

답 152

4 수열 $\{a_n\}$ 이 등차수열이므로

$$a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = 105 \text{에서}$$

$$\begin{aligned} \frac{6(a_5 + a_{10})}{2} &= 3(a_5 + a_{10}) \\ &= 105 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } a_5 + a_{10} = 35 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$a_1 = -2$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면 $\textcircled{1}$ 에서

$$(-2 + 4d) + (-2 + 9d) = 35$$

$$13d = 39$$

$$d = 3$$

따라서

$$a_{10} - a_5 = 5d = 5 \times 3 = 15$$

답 ③

5 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r ($r > 0$)이라 하면

$$\begin{aligned} \frac{5a_2}{a_3 + a_4} &= \frac{5}{\frac{a_3}{a_2} + \frac{a_4}{a_2}} \\ &= \frac{5}{r + r^2} \\ &= 16 \end{aligned}$$

이므로

$$16r^2 + 16r - 5 = 0$$

$$(4r - 1)(4r + 5) = 0$$

$r > 0$ 이어야 하므로

$$r = \frac{1}{4}$$

따라서

$$\frac{a_3}{a_5} = \frac{1}{r^2} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 4^2 = 16$$

답 ③

6 $a_n = 3 \times (\sqrt{3})^{n-1}$

$$= 3 \times 3^{\frac{n-1}{2}}$$

$$= 3^{\frac{n+1}{2}}$$

이므로

$$\log_3 (a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_{10})$$

$$= \log_3 (3^1 \times 3^{\frac{3}{2}} \times 3^2 \times \cdots \times 3^{\frac{11}{2}})$$

$$= \log_3 3^1 + \log_3 3^{\frac{3}{2}} + \log_3 3^2 + \cdots + \log_3 3^{\frac{11}{2}}$$

$$= 1 + \frac{3}{2} + 2 + \cdots + \frac{11}{2}$$

$$= \frac{10\left(1 + \frac{11}{2}\right)}{2}$$

$$= \frac{65}{2}$$

답 ⑤

7 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 이라 하자.

$$S_5 - S_4 = 12 \text{에서}$$

$$a_5 = 12$$

$$S_8 - S_4 = 180 \text{에서}$$

$$a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = 180$$

이때 $r = 1$ 이면

$$a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = 4 \times a_5 = 4 \times 12 = 48$$

이므로 조건을 만족시키지 않는다.

즉, $r \neq 1$ 이므로

정답과 풀이

$$a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = \frac{a_5(r^4 - 1)}{r - 1}$$

$$= \frac{12(r-1)(r^3 + r^2 + r + 1)}{r - 1}$$

$$= 180$$

에서

$$r^3 + r^2 + r - 14 = 0$$

$$(r-2)(r^2 + 3r + 7) = 0$$

r 은 실수이므로

$$r = 2$$

따라서

$$a_{10} = a_5 \times r^5 = 12 \times 2^5 = 384$$

답 384

- 8 $a_1 = 1$ 이고 공비가 음수이므로 모든 자연수 n 에 대하여 $a_{2n-1} > 0$, $a_{2n} < 0$ 이다.

그러므로 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r ($r < 0$)이라 하면

$$S_8 + T_8 = 2a_1 + 2a_3 + 2a_5 + 2a_7$$

$$= 2(1 + r^2 + r^4 + r^6)$$

$$= 80$$

에서

$$r^6 + r^4 + r^2 - 39 = 0$$

$r^2 = t$ 라 하면

$$t^3 + t^2 + t - 39 = 0$$

$$(t-3)(t^2 + 4t + 13) = 0$$

$t^2 + 4t + 13 > 0$ 이므로

$$t = 3$$

즉, $r^2 = 3$

$r < 0$ 이므로

$$r = -\sqrt{3}$$

따라서

$$S_{10} = \frac{1 - (-\sqrt{3})^{10}}{1 - (-\sqrt{3})}$$

$$= -\frac{242}{1 + \sqrt{3}}$$

$$= -\frac{242(1 - \sqrt{3})}{(1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})}$$

$$= 121 - 121\sqrt{3}$$

이므로

$$p - q = 121 - (-121) = 242$$

답 242

Level

1 기초 연습

본문 78~80쪽

- | | | | | |
|------|------|------|-----|------|
| 1 ④ | 2 ② | 3 ④ | 4 ⑤ | 5 ① |
| 6 ④ | 7 ② | 8 83 | 9 ③ | 10 ④ |
| 11 ① | 12 ② | | | |

- 1 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_6 - a_3 = 3d$$

$$= 7 - (-2)$$

$$= 9$$

이므로

$$d = 3$$

따라서

$$a_{10} = a_3 + 7d = -2 + 7 \times 3 = 19$$

답 ④

- 2 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하자.

$$a_1 + a_3 = a_1 + (a_1 + 2d)$$

$$= 2a_1 + 2d$$

$$= 2$$

이므로

$$a_1 + d = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$a_5 + a_7 = (a_1 + 4d) + (a_1 + 6d)$$

$$= 2a_1 + 10d$$

$$= 34$$

이므로

$$a_1 + 5d = 17 \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②에서

$$a_1 = -3, d = 4$$

이므로

$$a_n = -3 + (n-1) \times 4$$

$$= 4n - 7$$

따라서

$$a_{10} = 4 \times 10 - 7 = 33$$

답 ②

- 3 $2a - 1$ 이 a 와 $a^2 - 6$ 의 등차중항이므로

$$2(2a - 1) = a + (a^2 - 6)$$

$$a^2 - 3a - 4 = 0$$

$$(a + 1)(a - 4) = 0$$

$a > 0$ 이므로

$$a = 4$$

답 ④

4 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_7 - a_5 = 2d = 4 \text{에서}$$

$$d = 2$$

이때 $a_3 = a_1 + 2d = a_1 + 4 = 7$ 이므로

$$a_1 = 3$$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제10항까지의 합은

$$\frac{10(2 \times 3 + 9 \times 2)}{2} = 120$$

답 ⑤

5 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_1 = 58 \text{이므로}$$

$$S_{10} = \frac{10(2 \times 58 + 9d)}{2}$$

$$= 5(116 + 9d)$$

$$S_{20} = \frac{20(2 \times 58 + 19d)}{2}$$

$$= 10(116 + 19d)$$

$$S_{10} = S_{20} \text{이므로}$$

$$5(116 + 9d) = 10(116 + 19d)$$

$$116 + 9d = 232 + 38d$$

$$29d = -116$$

$$d = -4$$

따라서

$$a_{10} = 58 + 9 \times (-4) = 22$$

답 ①

6 $a_1 = S_1 = 3 - 2 + 1 = 2$

$$a_{10} = S_{10} - S_9$$

$$= (3 \times 10^2 - 2 \times 10 + 1) - (3 \times 9^2 - 2 \times 9 + 1)$$

$$= 55$$

따라서

$$a_1 + a_{10} = 2 + 55 = 57$$

답 ④

7 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 이라 하면 $a_1 = 2$ 이므로

$$3a_1 - a_2 + 3a_3 = a_4 \text{에서}$$

$$6 - 2r + 6r^2 = 2r^3$$

$$r^3 - 3r^2 + r - 3 = 0$$

$$(r-3)(r^2+1) = 0$$

r 은 실수이므로 $r = 3$

따라서

$$a_2 + a_3 = 2 \times 3 + 2 \times 3^2 = 6 + 18 = 24$$

답 ②

다른 풀이

$$3a_1 - a_2 + 3a_3 = a_4 \text{에서}$$

$$3(a_1 + a_3) = a_2 + a_4 \quad \text{..... ㉠}$$

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 이라 하면

$$a_2 = a_1 r, a_4 = a_3 r$$

이므로

$$a_2 + a_4 = r(a_1 + a_3)$$

즉, ㉠에서

$$3(a_1 + a_3) = r(a_1 + a_3)$$

$$a_1 + a_3 = a_1 + a_1 r^2 = 2(1 + r^2) \neq 0$$

이므로

$$r = 3$$

따라서

$$a_2 + a_3 = 3a_1 + 9a_1 = 12a_1 = 12 \times 2 = 24$$

8 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r ($r \neq 0$)이라 하면

$$a_n = a_1 \times r^{n-1}$$

이므로

$$a_n + a_{n+1} = a_1 \times r^{n-1} + a_1 \times r^n$$

$$= a_1 r^{n-1} (1 + r) = 2 \times 3^{n-1} \quad \text{..... ㉠}$$

㉠에 $n=1$ 을 대입하면

$$a_1(1+r) = 2 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠에 $n=2$ 를 대입하면

$$a_1 r(1+r) = 6 \quad \text{..... ㉢}$$

㉢ ÷ ㉡을 하면

$$r = 3$$

$r = 3$ 을 ㉡에 대입하면

$$4a_1 = 2$$

$$a_1 = \frac{1}{2}$$

따라서

$$a_5 = \frac{1}{2} \times 3^4 = \frac{81}{2}$$

이므로

$$p + q = 2 + 81 = 83$$

답 83

9 $a + 3$ 이 $a - 1$ 과 $4a + 6$ 의 등비중항이므로

$$(a+3)^2 = (a-1)(4a+6)$$

$$3a^2 - 4a - 15 = 0$$

$$(3a+5)(a-3) = 0$$

$a > 0$ 이므로

$$a = 3$$

답 ③

10 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 이라 하면 $r \neq 1$ 이므로

$$S_5 = \frac{a_1(r^5-1)}{r-1}$$

$$S_{10} = \frac{a_1(r^{10}-1)}{r-1} = \frac{a_1(r^5-1)(r^5+1)}{r-1}$$

이때 $\frac{S_{10}}{S_5} = r^5 + 1$ 이므로

$$r^5 + 1 = 10 \text{에서 } r^5 = 9$$

따라서

$$\frac{a_{10}}{a_5} = \frac{a_5 \times r^5}{a_5} = r^5 = 9$$

답 ④

참고

$a_1 = 0$ 이면 수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항이 0이므로 $\frac{S_{10}}{S_5} = 10$ 이 될 수 없다. 즉, $a_1 \neq 0$

이때 $r = 1$ 이면 $\frac{S_{10}}{S_5} = 2$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

즉, $r \neq 1$

또 $r = 0$ 이면 $\frac{S_{10}}{S_5} = 1$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다. 즉,

$r \neq 0$ 이므로 $a_5 \neq 0$

11 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 이라 하면 주어진 조건에 의하여 $r \neq 1$ 이므로

$$S_6 = \frac{a_1(r^6-1)}{r-1} = 4 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$S_{12} = \frac{a_1(r^{12}-1)}{r-1} = \frac{a_1(r^6-1)(r^6+1)}{r-1} = 32 \quad \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2} \div \textcircled{1}$ 을 하면

$$r^6 + 1 = 8$$

$$r^6 = 7$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\frac{a_1}{r-1} \times 6 = 4 \text{이므로}$$

$$\frac{a_1}{r-1} = \frac{2}{3}$$

따라서

$$\begin{aligned} S_{18} &= \frac{a_1(r^{18}-1)}{r-1} \\ &= \frac{a_1}{r-1} \times \{(r^6)^3 - 1\} \\ &= \frac{2}{3} \times (7^3 - 1) \\ &= 228 \end{aligned}$$

답 ①

12 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 이라 하면

$$\frac{a_{10}}{a_4} = r^6 = \frac{2}{6} = \frac{1}{9}$$

이고 $r > 0$ 이므로

$$r^3 = \frac{1}{3}$$

이때 $a_4 = a_1 r^3 = \frac{1}{3} a_1 = 6$ 이므로

$$a_1 = 18$$

한편, $a_n = 18 \times r^{n-1}$ 이므로

$$\begin{aligned} b_n &= a_{3n-2} \\ &= 18 \times r^{3n-3} \\ &= 18 \times (r^3)^{n-1} \\ &= 18 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

즉, 수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 $b_1 = a_1 = 18$ 이고 공비가 $\frac{1}{3}$ 인 등비수열이다.

따라서 수열 $\{b_n\}$ 의 첫째항부터 제5항까지의 합은

$$\begin{aligned} \frac{18\left(1 - \frac{1}{3^5}\right)}{1 - \frac{1}{3}} &= 27\left(1 - \frac{1}{3^5}\right) \\ &= 27 - \frac{1}{9} \\ &= \frac{242}{9} \end{aligned}$$

답 ②

Level

2 기본 연습

본문 81~83쪽

1 ③	2 ③	3 ⑤	4 30	5 ③
6 ③	7 ②	8 ①	9 12	10 ③
11 ③	12 ④			

1 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d ($d \neq 0$)이라 하자.

$d > 0$ 이면 $a_1 = 20 < a_{11} < a_{21}$ 에서

$|a_{11}| < |a_{21}|$ 이므로 조건을 만족시킬 수 없다.

즉, $d < 0$ 이고 $a_1 = 20 > a_{11} > a_{21}$

이때 $|a_{11}| = |a_{21}|$ 이 성립하려면

$a_{11} > 0, a_{21} < 0$ 이어야 한다.

즉, $a_{21} = -a_{21}$ 이므로

$$a_{11} + a_{21} = 0$$

이때 $a_1 = 20$ 이므로

$$(20 + 10d) + (20 + 20d) = 40 + 30d = 0$$

즉, $d = -\frac{4}{3}$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 은

$$a_n = 20 + (n-1) \times \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{-4n + 64}{3}$$

$$\text{따라서 } a_m = \frac{-4m + 64}{3} = -16 \text{에서}$$

$$m = 28$$

답 ③

2 $x^3 - (a+1)x^2 + (a-2)x + 2a = 0$ 에서
 $(x+1)(x-2)(x-a) = 0$

이므로 주어진 삼차방정식의 세 근은 $-1, 2, a$ 이다.

$a = -1$ 또는 $a = 2$ 이면 조건을 만족시킬 수 없으므로

$$a \neq -1, a \neq 2$$

(i) $a < -1$ 인 경우

-1 이 a 와 2 의 등차중항이므로

$$-2 = a + 2$$

$$a = -4$$

(ii) $-1 < a < 2$ 인 경우

a 가 -1 과 2 의 등차중항이므로

$$2a = -1 + 2$$

$$a = \frac{1}{2}$$

(iii) $a > 2$ 인 경우

2 가 -1 과 a 의 등차중항이므로

$$4 = -1 + a$$

$$a = 5$$

따라서 조건을 만족시키는 모든 실수 a 의 값의 합은

$$-4 + \frac{1}{2} + 5 = \frac{3}{2}$$

답 ③

3 ㄱ. [반례] $a_n = -n + 2$ 이면

$$a_1 + a_2 = 1 + 0 = 1, a_3 = -1$$

이므로 $a_1 + a_2 > a_3$ 이지만

$$a_4 + a_5 = (-2) + (-3) = -5, a_6 = -4$$

이므로 $a_4 + a_5 < a_6$ 이다. (거짓)

ㄴ. 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면 $a_1 \neq a_2$ 이므로

$$d \neq 0$$

즉,

$$a_3a_5 + a_4a_6 - a_3a_6 - a_4a_5$$

$$= a_3(a_5 - a_6) - a_4(a_5 - a_6)$$

$$= (a_3 - a_4)(a_5 - a_6)$$

$$= d^2 \neq 0$$

이므로

$$a_3a_5 + a_4a_6 \neq a_3a_6 + a_4a_5 \text{ (참)}$$

ㄷ. 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면 $a_2 > a_1$ 이므로 d 는 양의 실수이다.

이때

$$a_5^2 - a_1a_9 = a_5^2 - (a_5 - 4d)(a_5 + 4d)$$

$$= a_5^2 - a_5^2 + 16d^2 = 16d^2 > 0$$

이므로

$$a_5^2 > a_1a_9 \text{ (참)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

4 자연수 n 에 대하여

$$b_n = a_{2n-1}, c_n = a_{2n}$$

이라 하자.

$$b_n = a_{2n-1}$$

$$= (-1)^{2n-1} \{3(2n-1) - 1\}$$

$$= -(6n-4)$$

$$= -6n + 4$$

이고

$$c_n = a_{2n}$$

$$= (-1)^{2n} (3 \times 2n - 1)$$

$$= 6n - 1$$

이므로 수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 -2 , 공차가 -6 인 등차수열
 이고, 수열 $\{c_n\}$ 은 첫째항이 5 , 공차가 6 인 등차수열이다.

따라서

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{20}$$

$$= b_1 + c_1 + b_2 + c_2 + \dots + b_{10} + c_{10}$$

$$= (b_1 + b_2 + \dots + b_{10}) + (c_1 + c_2 + \dots + c_{10})$$

$$= \frac{10\{2 \times (-2) + 9 \times (-6)\}}{2} + \frac{10\{2 \times 5 + 9 \times 6\}}{2}$$

$$= 5 \times (-58) + 5 \times 64$$

$$= 30$$

답 30

다른 풀이

$b_n = a_{2n-1}, c_n = a_{2n}$ 이라 하면

$$b_n = -6n + 4, c_n = 6n - 1 \text{이므로}$$

$$b_n + c_n = 3$$

정답과 풀이

따라서

$$\begin{aligned} & a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{20} \\ &= (b_1 + c_1) + (b_2 + c_2) + (b_3 + c_3) + \cdots + (b_{10} + c_{10}) \\ &= 3 \times 10 \\ &= 30 \end{aligned}$$

5 a_1 과 a_9 의 등차중항이 a_5 이므로

$$S_9 = \frac{9(a_1 + a_9)}{2} = 9 \times \frac{a_1 + a_9}{2} = 9a_5$$

$S_9 < 0$ 이므로 $a_5 < 0$

또 a_2 와 a_{10} 의 등차중항이 a_6 이므로

$$a_6 = \frac{a_2 + a_{10}}{2} > 0$$

이때 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이므로 $a_5 < 0 < a_6$ 이면 $n \leq 5$ 일 때 $a_n < 0$, $n \geq 6$ 일 때 $a_n > 0$ 이다.

따라서 $a_n > 0$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값은 6이다.

답 ③

6 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차가 d ($d > 0$)이므로

$$\begin{aligned} b_n &= (a_{n+2})^2 - (a_n)^2 \\ &= (a_{n+2} - a_n)(a_{n+2} + a_n) \\ &= 2d \times 2a_{n+1} \\ &= 4d(-1 + nd) \\ &= 4d^2n - 4d \end{aligned}$$

즉, 수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 $4d^2 - 4d$ 이고 공차가 $4d^2$ 인 등차수열이다.

그러므로

$$\begin{aligned} S_{10} &= \frac{10(8d^2 - 8d + 36d^2)}{2} \\ &= 10(22d^2 - 4d) \\ &= 1860 \end{aligned}$$

에서

$$\begin{aligned} 11d^2 - 2d - 93 &= 0 \\ (11d + 31)(d - 3) &= 0 \\ d > 0 \text{이므로} \\ d &= 3 \end{aligned}$$

답 ③

7 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하자.

모든 자연수 n 에 대하여

$$\begin{aligned} S_{n+2} - S_n &= a_{n+1} + a_{n+2} \\ &= a_1 + nd + a_1 + (n+1)d \\ &= (2a_1 + d) + 2dn \\ &= 112 - 16n \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} 2d &= -16 \text{에서 } d = -8 \\ 2a_1 + d &= 112 \text{에서} \\ 2a_1 &= 112 - d = 112 + 8 = 120 \\ a_1 &= 60 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n\{2a_1 + (n-1)d\}}{2} \\ &= \frac{n\{2 \times 60 + (n-1) \times (-8)\}}{2} \\ &= \frac{n(-8n + 128)}{2} \\ &= -4n(n-16) \end{aligned}$$

따라서 $S_1 = S_{15}$, $S_2 = S_{14}$, $S_3 = S_{13}$, ..., $S_7 = S_9$ 이므로

조건을 만족시키는 서로 다른 두 자연수 p, q 의 순서쌍

(p, q) 는 $(1, 15), (2, 14), (3, 13), \dots, (7, 9)$

이고 그 개수는 7이다.

답 ②

8 자연수 n 에 대하여

$$a_{2n+1} = S_{2n+1} - S_{2n} = 5n - 1 \quad \text{..... ㉠}$$

$$a_{2n} = S_{2n} - S_{2n-1} = -4n + 3 \quad \text{..... ㉡}$$

㉡에서 $a_2 = -1$ 이고 $a_1 = a_2$ 이므로 $a_1 = a_2 = -1$

즉, ㉠에서 $a_1 = -1$ 이고 $a_{2n+1} = 5n - 1$ 이므로

$$a_{2n-1} = 5n - 6$$

따라서 수열 $\{a_{2n-1}\}$ 은 첫째항이 -1 , 공차가 5인 등차수열이고, 수열 $\{a_{2n}\}$ 은 첫째항이 -1 , 공차가 -4 인 등차수열이므로

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \frac{n\{-2 + (n-1) \times 5\}}{2} + \frac{n\{-2 + (n-1) \times (-4)\}}{2} \\ &= \frac{n(5n-7)}{2} + \frac{n(-4n+2)}{2} \\ &= \frac{n(n-5)}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{2n-1} &= \frac{n\{-2 + (n-1) \times 5\}}{2} \\ &\quad + \frac{(n-1)\{-2 + (n-2) \times (-4)\}}{2} \\ &= \frac{n(5n-7)}{2} + \frac{(n-1)(-4n+6)}{2} \\ &= \frac{n^2 + 3n - 6}{2} \end{aligned}$$

$S_{2n} < 0$ 일 때 $0 < n < 5$ 이므로

$n = 1, 2, 3, 4$

즉, $S_k < 0$ 을 만족시키는 짝수 k 의 값은 2, 4, 6, 8

S_{2n-1} 에서 $S_1 = -1 < 0$ 이고

$n \geq 2$ 이면 $n^2 + 3n - 6 > 0$ 이므로 $S_{2n-1} > 0$

즉, $S_k < 0$ 을 만족시키는 홀수 k 의 값은 1

따라서 $S_k < 0$ 을 만족시키는 모든 자연수 k 의 값은

1, 2, 4, 6, 8이고 그 합은

$$1 + 2 + 4 + 6 + 8 = 21$$

답 ①

9 세 수 2, a , b 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 a 는 2와 b 의 등비중항이다.

$$\text{즉, } a^2 = 2b \quad \dots\dots \text{㉠}$$

또 세 수 a , b , 12가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 b 는 a 와 12의 등차중항이다.

$$\text{즉, } 2b = a + 12 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에서

$$a^2 - a - 12 = 0, (a + 3)(a - 4) = 0$$

$a > 0$ 이므로 $a = 4$

$$2b = a^2 = 4^2 = 16 \text{이므로}$$

$$b = 8$$

따라서

$$a + b = 4 + 8 = 12$$

답 12

10 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하자.

$$(a_4 + a_5) - (a_3 + a_4) = a_5 - a_3 = 2d = 8$$

이므로

$$d = 4$$

$a_3 + a_4 = 0$ 에서

$$\begin{aligned} (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) &= 2a_1 + 5d \\ &= 2a_1 + 5 \times 4 \\ &= 2a_1 + 20 \\ &= 0 \end{aligned}$$

이므로 $a_1 = -10$

즉, $a_n = -10 + (n - 1) \times 4 = 4n - 14$ 이므로

$$a_p = 4p - 14$$

$$a_{p+2} = 4(p + 2) - 14 = 4p - 6$$

$$a_{p+q} = 4(p + q) - 14$$

이때 세 수 a_p , a_{p+2} , a_{p+q} 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$(4p - 6)^2 = (4p - 14)(4p + 4q - 14)$$

이것을 전개하여 정리하면

$$2pq - 8p - 7q + 20 = 0$$

$$2p(q - 4) - 7(q - 4) = 8$$

$$(2p - 7)(q - 4) = 8 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$q > 2$ 이므로

$$q - 4 > -2$$

즉, $q - 4 = -1, 1, 2, 4, 8$

p 가 자연수이므로

$$2p - 7 = 1 \text{ 또는 } 2p - 7 = -1$$

그러므로 ㉠을 만족시키려면

$$2p - 7 = 1, q - 4 = 8 \text{이어야 한다.}$$

따라서 $p = 4, q = 12$ 이므로

$$p + q = 4 + 12 = 16$$

답 ③

11 ㄱ. 조건 (가)에 의하여

$$a_3 a_6 = a_1 r^2 \times a_1 r^5 = a_1^2 \times r^7 > 0$$

이고, $a_1^2 > 0$ 이므로 $r^7 > 0$

즉, $r > 0$ (참)

ㄴ. 조건 (나)에 의하여

$$\begin{aligned} a_2 - a_3 + a_4 - a_5 &= a_1 r - a_1 r^2 + a_1 r^3 - a_1 r^4 \\ &= a_1 r(1 - r)(1 + r^2) > 0 \quad \dots\dots \text{㉠} \end{aligned}$$

이때 $a_1 > 0, r > 0$ 이므로 $a_n > 0$ 이고 ㉠에서

$$1 - r > 0, \text{ 즉 } r < 1$$

$$\frac{a_6}{a_4} = r^2, \frac{a_3}{a_2} = r \text{이고}$$

$0 < r < 1$ 일 때 $r^2 < r$ 이므로

$$\frac{a_6}{a_4} < \frac{a_3}{a_2}$$

따라서 $a_2 a_6 < a_3 a_4$ (거짓)

ㄷ. 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 양수이고 공비 $r > 0$

$0 < r < 1$ 인 등비수열이므로 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} < a_n \text{이다. (참)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

12 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r ($r > 1$)이라 하자.

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_3}{a_2} + \frac{a_3}{a_4} + \frac{a_5}{a_4} + \frac{a_5}{a_6} + \frac{a_7}{a_6} = 10 \text{에서}$$

$$\frac{1}{r} + r + \frac{1}{r} + r + \frac{1}{r} + r = 10$$

$$3r^2 - 10r + 3 = 0$$

$$(3r - 1)(r - 3) = 0$$

$r > 1$ 이므로 $r = 3$

정답과 풀이

이때 $a_4 = a_1 \times 3^3 = 2$ 이므로

$$a_1 = \frac{2}{27} \text{ 이고}$$

$$S_n = \frac{\frac{2}{27}(3^n - 1)}{3 - 1}$$

$$= \frac{1}{27}(3^n - 1) > 3^{10}$$

에서 $3^n - 1 > 3^{13}$

$n \geq 14$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값은 14이다.

답 ④

Level 3 실력 완성 본문 84쪽

1 48 2 ② 3 449

1 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하자.

$a_1 < 0$ 이면 $S_1 < 0$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

즉, $a_1 > 0$

또 $a_2 < 0$ 이면 $S_3 = 3a_2 < 0$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

즉, $a_1 > a_2 > 0$ 이므로 2 이상의 자연수 k 에 대하여

$S_k = M_1$ 이라 하면 $n \leq k$ 일 때 $a_n > 0$ 이고 $n > k+1$ 일 때 $a_n < 0$ 이다.

(i) $S_k = M_1, S_{k-1} = M_2, S_{k+1} = M_3$ 인 경우

$$M_1 - M_2 = S_k - S_{k-1} = a_k = 2$$

$$M_2 - M_3 = S_{k-1} - S_{k+1} = -a_k - a_{k+1} = 1$$

즉, $a_{k+1} = -3$ 이므로

$$d = -5$$

이고

$$a_1 = a_k - (k-1) \times (-5) = 5k - 3$$

이때

$$S_n = \frac{n\{2(5k-3) + (n-1) \times (-5)\}}{2}$$

$$= \frac{n(10k - 5n - 1)}{2}$$

이므로 $S_n < 0$ 에서

$$n > 2k - \frac{1}{5}$$

즉, $S_n < 0$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값이 $2k$ 이므로 자연수 n 의 최솟값이 21이라는 조건을 만족시킬 수 없다.

(ii) $S_k = M_1, S_{k+1} = M_2, S_{k-1} = M_3$ 인 경우

$$M_1 - M_2 = S_k - S_{k+1} = -a_{k+1} = 2$$

이므로

$$a_{k+1} = -2$$

$$M_2 - M_3 = S_{k+1} - S_{k-1} = a_{k+1} + a_k = 1$$

이므로

$$a_k = 3$$

즉, $d = -5$ 이고

$$a_1 = a_k - (k-1) \times (-5) = 5k - 2$$

이때

$$S_n = \frac{n\{2(5k-2) + (n-1) \times (-5)\}}{2}$$

$$= \frac{n(10k - 5n + 1)}{2}$$

이므로 $S_n < 0$ 에서

$$n > 2k + \frac{1}{5}$$

즉, $S_n < 0$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값이 $2k+1$ 이므로

$$2k+1=21$$

$$k=10$$

따라서

$$a_1 = 5 \times 10 - 2 = 48$$

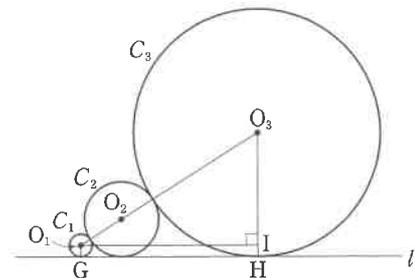
답 48

2 조건 (가)에 의하여 세 점 O_1, O_2, O_3 은 한 직선 위에 있다.

또 $r_1 = 1$ 이므로 조건 (나)에 의하여 공비를 r 이라 하면

$$r_2 = r, r_3 = r^2$$

으로 놓을 수 있고, $\overline{GH} = 20$ 이므로 $r_1 < r_2 < r_3$, 즉 $r > 1$ 이다.



그림과 같이 점 O_1 에서 선분 O_3H 에 내린 수선의 발을 I 라 하면

$$\overline{O_1O_3} = 1 + 2r + r^2$$

$$\overline{O_3I} = r^2 - 1$$

이므로 직각삼각형 O_1IO_3 에서

$$\begin{aligned} \overline{O_1I}^2 &= (1 + 2r + r^2)^2 - (r^2 - 1)^2 \\ &= (1 + 2r + r^2 + r^2 - 1)(1 + 2r + r^2 - r^2 + 1) \\ &= (2r^2 + 2r)(2r + 2) \\ &= 4r(r + 1)^2 \end{aligned}$$

이때 $\overline{O_1I} = \overline{GH} = 20$ 이므로

$$4r(r + 1)^2 = 400$$

$$r^3 + 2r^2 + r - 100 = 0$$

$$(r - 4)(r^2 + 6r + 25) = 0$$

$$r^2 + 6r + 25 > 0 \text{ 이므로}$$

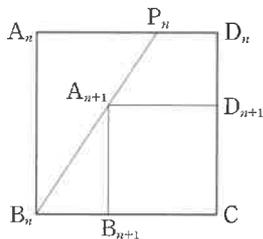
$$r = 4$$

따라서 세 원 C_1, C_2, C_3 의 넓이의 합은

$$\pi + 16\pi + 256\pi = 273\pi$$

답 ②

3



$\overline{A_nB_n} = b_n$ 이라 하자.

삼각형 $A_nB_nP_n$ 과 삼각형 $B_{n+1}A_{n+1}B_n$ 이 서로 닮음이고,

$$\overline{A_nB_n} : \overline{A_nP_n} = 3 : 2 \text{ 이므로}$$

$$\overline{A_{n+1}B_{n+1}} : \overline{B_nB_{n+1}} = 3 : 2$$

$$\text{즉, } b_{n+1} : (b_n - b_{n+1}) = 3 : 2 \text{ 이므로}$$

$$2b_{n+1} = 3b_n - 3b_{n+1}$$

$$b_{n+1} = \frac{3}{5} b_n$$

그러므로 수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 5이고 공비가 $\frac{3}{5}$ 인 등비수열이다.

$$\text{따라서 } b_5 = 5 \times \left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{81}{125} \text{ 이고}$$

$$a_5 = 4b_5 = \frac{324}{125}$$

이므로

$$p + q = 125 + 324 = 449$$

답 449

06 수열의 합과 수학적 귀납법

유제

본문 87~97쪽

1 ②	2 ②	3 ①	4 952	5 ①
6 ②	7 ③	8 515	9 ⑤	10 ②

$$\begin{aligned} 1 \quad \sum_{n=1}^{10} (b_n + 1) &= \sum_{n=1}^{10} b_n + \sum_{n=1}^{10} 1 \\ &= \sum_{n=1}^{10} b_n + 1 \times 10 \\ &= \sum_{n=1}^{10} b_n + 10 \\ &= 4 \end{aligned}$$

에서

$$\sum_{n=1}^{10} b_n = -6$$

이때

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{10} (a_n + b_n) &= \sum_{n=1}^{10} a_n + \sum_{n=1}^{10} b_n \\ &= \sum_{n=1}^{10} a_n - 6 \\ &= 7 \end{aligned}$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{10} a_n = 7 + 6 = 13$$

답 ②

$$\begin{aligned} 2 \quad \sum_{n=1}^8 (a_n + a_{n+2}) &= \sum_{n=1}^8 a_n + \sum_{n=1}^8 a_{n+2} \\ &= \sum_{n=1}^8 a_n + \sum_{n=3}^{10} a_n \\ &= \left(\sum_{n=1}^{10} a_n - a_9 - a_{10}\right) + \left(\sum_{n=1}^{10} a_n - a_1 - a_2\right) \\ &= 2 \sum_{n=1}^{10} a_n - (a_1 + a_2 + a_9 + a_{10}) \\ &= 2 \times 8 - (a_1 + a_2 + a_9 + a_{10}) \\ &= 16 - (a_1 + a_2 + a_9 + a_{10}) \\ &= 10 \end{aligned}$$

이므로

$$a_1 + a_2 + a_9 + a_{10} = 6$$

따라서

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^7 a_{n+1} &= \sum_{n=3}^8 a_n \\ &= \sum_{n=1}^{10} a_n - (a_1 + a_2 + a_9 + a_{10}) \end{aligned}$$

정답과 풀이

$$= 8 - 6$$

$$= 2$$

다른 풀이

$$\sum_{n=1}^8 (a_n + a_{n+2}) = \sum_{n=1}^8 a_n + \sum_{n=1}^8 a_{n+2}$$

$$= \sum_{n=1}^8 a_n + \sum_{n=3}^{10} a_n$$

$$= \sum_{n=1}^{10} a_n + \sum_{n=3}^8 a_n$$

$$= 8 + \sum_{n=3}^8 a_n$$

$$= 10$$

이므로

$$\sum_{n=3}^8 a_n = 2$$

따라서 $\sum_{n=2}^7 a_{n+1} = \sum_{n=3}^8 a_n = 2$

3 $\sum_{k=1}^{10} (k+2)^2 - \sum_{k=1}^{10} k^2 = \sum_{k=1}^{10} \{(k+2)^2 - k^2\}$

$$= \sum_{k=1}^{10} (4k+4)$$

$$= 4 \sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=1}^{10} 4$$

$$= 4 \times \frac{10 \times 11}{2} + 4 \times 10$$

$$= 260$$

답 ②

답 ①

4 첫째항이 1이고 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은

$$a_n = 1 + (n-1) \times 3 = 3n - 2$$

이므로

$$\sum_{n=1}^7 (a_n)^2 = \sum_{n=1}^7 (3n-2)^2$$

$$= \sum_{n=1}^7 (9n^2 - 12n + 4)$$

$$= 9 \sum_{n=1}^7 n^2 - 12 \sum_{n=1}^7 n + \sum_{n=1}^7 4$$

$$= 9 \times \frac{7 \times 8 \times 15}{6} - 12 \times \frac{7 \times 8}{2} + 4 \times 7$$

$$= 952$$

답 952

5 $\sum_{n=1}^9 \frac{4n^2 + 8n + 10}{4n^2 + 8n + 3}$

$$= \sum_{n=1}^9 \left(1 + \frac{7}{4n^2 + 8n + 3} \right)$$

$$= 9 + 7 \sum_{n=1}^9 \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$= 9 + \frac{7}{2} \sum_{n=1}^9 \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right)$$

$$= 9 + \frac{7}{2} \left\{ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right) + \dots + \left(\frac{1}{19} - \frac{1}{21} \right) \right\}$$

$$= 9 + \frac{7}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{21} \right)$$

$$= 10$$

답 ①

6 $\sum_{n=1}^{20} \frac{1}{\sqrt{4n+1} + \sqrt{4n-3}}$

$$= \sum_{n=1}^{20} \frac{\sqrt{4n+1} - \sqrt{4n-3}}{(\sqrt{4n+1} + \sqrt{4n-3})(\sqrt{4n+1} - \sqrt{4n-3})}$$

$$= \sum_{n=1}^{20} \frac{\sqrt{4n+1} - \sqrt{4n-3}}{(4n+1) - (4n-3)}$$

$$= \sum_{n=1}^{20} \frac{\sqrt{4n+1} - \sqrt{4n-3}}{4}$$

$$= \frac{1}{4} \{ (\sqrt{5} - \sqrt{1}) + (\sqrt{9} - \sqrt{5}) + (\sqrt{13} - \sqrt{9}) + \dots + (\sqrt{81} - \sqrt{77}) \}$$

$$= \frac{1}{4} (-\sqrt{1} + \sqrt{81})$$

$$= \frac{1}{4} \times 8$$

$$= 2$$

답 ②

7 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = a_n + 4$$

를 만족시키므로 수열 $\{a_n\}$ 은 공차가 4인 등차수열이다.

이때

$$\sum_{n=1}^{11} a_n = \frac{11(2a_1 + 10 \times 4)}{2}$$

$$= 11(a_1 + 20)$$

$$= 110$$

이므로

$$a_1 = -10$$

따라서

$$a_{20} = a_1 + 19 \times 4$$

$$= -10 + 19 \times 4$$

$$= 66$$

답 ③

8 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$(a_{n+1})^2 = a_n a_{n+2}, \quad \text{즉 } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$$

를 만족시키므로 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이다.

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 이라 하면 $a_3=1$ 이므로

$$a_5 + a_7 = a_3 r^2 + a_3 r^4 = r^2 + r^4 = 20$$

$$r^4 + r^2 - 20 = 0$$

$$(r^2 + 5)(r^2 - 4) = 0$$

$$r^2 = 4$$

$$r > 0 \text{ 이어야 하므로 } r = 2$$

$$\text{이때 } a_1 = \frac{a_3}{r^2} = \frac{1}{4}$$

따라서

$$\sum_{n=1}^9 a_n = \frac{1}{4} \frac{(2^9 - 1)}{2 - 1}$$

$$= \frac{511}{4}$$

이므로

$$p + q = 4 + 511 = 515$$

답 515

9 $(a_{n+1})^2 + a_{n+1} = (a_n)^2 + a_n$ 에서

$$(a_{n+1})^2 - (a_n)^2 = a_n - a_{n+1}$$

$$(a_{n+1} + a_n)(a_{n+1} - a_n) = -(a_{n+1} - a_n)$$

$a_n \neq a_{n+1}$ 이므로

$$a_{n+1} + a_n = -1$$

$$\text{즉, } a_{n+1} = -a_n - 1$$

$$a_1 = -5 \text{ 이므로}$$

$$a_2 = -a_1 - 1 = 5 - 1 = 4$$

$$a_3 = -a_2 - 1 = -4 - 1 = -5$$

$$a_4 = -a_3 - 1 = 5 - 1 = 4$$

⋮

이때 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_n = -5 \text{ 이면 } a_{n+1} = -(-5) - 1 = 4 \text{ 이고,}$$

$$a_n = 4 \text{ 이면 } a_{n+1} = -4 - 1 = -5 \text{ 이므로}$$

모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{2n-1} = -5, \quad a_{2n} = 4$$

$$\text{따라서 } \sum_{n=1}^{10} a_{2n} = \sum_{n=1}^{10} 4 = 4 \times 10 = 40$$

답 5

10 (i) $n=1$ 일 때, (좌변) $= a_1 = 2$, (우변) $= 1 \times 2 = 2$ 이므로 (*)이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때 (*)이 성립한다고 가정하면

$$a_k = k(k+1)$$

이고, $ka_{k+1} = (k+2)a_k$ 에서

$$a_{k+1} = \frac{k+2}{k} \times a_k \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \frac{k+2}{k} \times k(k+1) \\ &= (k+1)(k+2) \end{aligned}$$

즉, $n=k+1$ 일 때도 (*)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 (*)이 성립한다.

따라서 $f(k) = \frac{k+2}{k}$, $g(k) = (k+1)(k+2)$ 이므로

$$\begin{aligned} f(6) \times g(10) &= \frac{8}{6} \times 11 \times 12 \\ &= 176 \end{aligned}$$

답 2

Level

1 기초 연습 본문 98~99쪽

1 ②	2 ③	3 ①	4 ③	5 ②
6 ④	7 ②	8 ①		

$$\begin{aligned} 1 \quad & \sum_{n=1}^{10} (a_n + 3) - \sum_{n=1}^9 (a_{n+1} - 2) \\ &= \sum_{n=1}^{10} a_n + \sum_{n=1}^{10} 3 - \sum_{n=1}^9 a_{n+1} + \sum_{n=1}^9 2 \\ &= \sum_{n=1}^{10} a_n + 3 \times 10 - \sum_{n=2}^{10} a_n + 2 \times 9 \\ &= \left(\sum_{n=1}^{10} a_n - \sum_{n=2}^{10} a_n \right) + 48 \\ &= a_1 + 48 \end{aligned}$$

이므로

$$a_1 + 48 = 50$$

따라서 $a_1 = 2$

답 2

2 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_{n+2} - a_n = 2d$$

이므로

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{10} (a_{n+2} - a_n) &= \sum_{n=1}^{10} 2d \\ &= 2d \times 10 \\ &= 20d \\ &= 30 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } d = \frac{3}{2}$$

정답과 풀이

따라서 수열 $\{a_{2n-1}\}$ 은 첫째항이 $a_1=5$,
공차가 $2d=2 \times \frac{3}{2}=3$ 인 등차수열이므로

$$\sum_{n=1}^5 a_{2n-1} = \frac{5(2 \times 5 + 4 \times 3)}{2} = 55$$

답 ③

3 $a_n = (2n^2 + 3n - 3) - (n^2 + 1) = n^2 + 3n - 4$
이므로

$$\begin{aligned} \frac{a_{2n}}{n+2} &= \frac{4n^2 + 6n - 4}{n+2} \\ &= \frac{2(n+2)(2n-1)}{n+2} \\ &= 4n - 2 \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{10} \frac{a_{2n}}{n+2} &= \sum_{n=1}^{10} (4n - 2) \\ &= 4 \sum_{n=1}^{10} n - \sum_{n=1}^{10} 2 \\ &= 4 \times \frac{10 \times 11}{2} - 2 \times 10 \\ &= 200 \end{aligned}$$

답 ①

4 이차방정식 $2x^2 - 8x + n = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 16 - 2n$$

(i) $16 - 2n > 0$ 에서 $n < 8$ 이므로
 $n = 1, 2, 3, \dots, 7$ 일 때 $a_n = 2$

(ii) $16 - 2n = 0$ 에서 $n = 8$ 이므로
 $n = 8$ 일 때 $a_n = 1$

(iii) $16 - 2n < 0$ 에서 $n > 8$ 이므로
 $n = 9, 10, 11, \dots$ 일 때 $a_n = 0$

따라서

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{100} a_n &= \sum_{n=1}^7 a_n + a_8 + \sum_{n=9}^{100} a_n \\ &= \sum_{n=1}^7 2 + 1 + \sum_{n=9}^{100} 0 \\ &= 2 \times 7 + 1 + 0 \times 92 \\ &= 15 \end{aligned}$$

답 ③

5 $\sum_{n=1}^6 (2n^2 - an) = 2 \sum_{n=1}^6 n^2 - a \sum_{n=1}^6 n$
 $= 2 \times \frac{6 \times 7 \times 13}{6} - a \times \frac{6 \times 7}{2}$
 $= 182 - 21a$

이므로

$$182 - 21a = 168$$

$$21a = 14$$

따라서 $a = \frac{2}{3}$

답 ②

6 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차가 3이므로

$$a_{n+1} - a_n = 3$$

따라서

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{16} \frac{1}{\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_n}} \\ &= \sum_{n=1}^{16} \frac{\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n}}{(\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_n})(\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n})} \\ &= \sum_{n=1}^{16} \frac{\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n}}{a_{n+1} - a_n} \\ &= \sum_{n=1}^{16} \frac{\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n}}{3} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{16} (\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n}) \\ &= \frac{1}{3} \{(\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}) + (\sqrt{a_3} - \sqrt{a_2}) + (\sqrt{a_4} - \sqrt{a_3}) + \dots + (\sqrt{a_{17}} - \sqrt{a_{16}})\} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3} (-\sqrt{a_1} + \sqrt{a_{17}})$$

$$= \frac{1}{3} (-\sqrt{1} + \sqrt{1 + 16 \times 3})$$

$$= \frac{1}{3} \times 6$$

$$= 2$$

답 ④

7 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$(a_{n+1})^2 = a_n a_{n+2}, \quad \text{즉} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$$

를 만족시키므로 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이다.

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 이라 하면

$$a_7 = 3(a_4)^2 \text{에서}$$

$$a_1 r^6 = 3(a_1 r^3)^2$$

$$a_1 r^6 = 3a_1^2 r^6$$

$$a_1 \neq 0, r \neq 0 \text{이므로}$$

$$1 = 3a_1$$

따라서 $a_1 = \frac{1}{3}$

답 ②

- 8 $a_1=4 \geq 0$ 이므로
 $a_2=a_1-10=4-10=-6$
 $a_2 < 0$ 이므로
 $a_3=-a_2+5=6+5=11$
 $a_3 \geq 0$ 이므로
 $a_4=a_3-10=11-10=1$
 $a_4 \geq 0$ 이므로
 $a_5=a_4-10=1-10=-9$
 $a_5 < 0$ 이므로
 $a_6=-a_5+5=9+5=14$
 $a_6 \geq 0$ 이므로
 $a_7=a_6-10=14-10=4$
 $a_7=a_1$ 이므로 모든 자연수 n 에 대하여
 $a_{n+6}=a_n$
 따라서
 $a_{10}=a_4=1, a_{20}=a_2=-6$
 이므로
 $a_{10}+a_{20}=1+(-6)=-5$

답 ①

Level
2 기본 연습 본문 100~104쪽

1 ⑤	2 ④	3 74	4 ⑤	5 363
6 35	7 ②	8 ④		

- 1 $a_m = \sum_{k=1}^m k = \frac{m(m+1)}{2}$ 이므로

$$\sum_{m=1}^n \frac{a_m}{m+1} = \sum_{m=1}^n \left\{ \frac{1}{m+1} \times \frac{m(m+1)}{2} \right\}$$

$$= \sum_{m=1}^n \frac{m}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n m$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{4} \geq 100$$
 에서 $n(n+1) \geq 400$
 $19 \times 20 = 380 < 400, 20 \times 21 = 420 \geq 400$ 이므로 조건을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값은 20이다.

답 ⑤

- 2 수열 $\{a_n\}$ 이 공차가 2인 등차수열이므로 모든 자연수 n 에 대하여
 $a_{n+1}-a_n=2$
 이다. 그러므로

$$\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{a_n a_{n+1}}$$

$$= \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{a_{n+1}-a_n} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{10} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right) + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} \right) + \left(\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{a_{10}} - \frac{1}{a_{11}} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{11}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1+20} \right)$$

$$= \frac{10}{a_1(a_1+20)}$$

$$= \frac{5}{48}$$

$$a_1^2 + 20a_1 - 96 = 0$$

$$(a_1-4)(a_1+24) = 0$$

$$a_1 > 0$$
이므로 $a_1=4$

답 ④

- 3 $x+n = \frac{1}{x-1} + 2$ 에서
 $x^2 + (n-3)x - n + 1 = 0$
 이 이차방정식의 두 근이 α_n, β_n 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $\alpha_n + \beta_n = -n + 3, \alpha_n \beta_n = -n + 1$
 따라서

$$\sum_{n=4}^{11} \frac{1}{\alpha_n^2 \beta_n + \alpha_n \beta_n^2}$$

$$= \sum_{n=4}^{11} \frac{1}{\alpha_n \beta_n (\alpha_n + \beta_n)}$$

$$= \sum_{n=4}^{11} \frac{1}{(-n+1)(-n+3)}$$

$$= \sum_{n=4}^{11} \frac{1}{(n-3)(n-1)}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=4}^{11} \left(\frac{1}{n-3} - \frac{1}{n-1} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{10} \right) \right]$$

정답과 풀이

$$= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \right)$$

$$= \frac{29}{45}$$

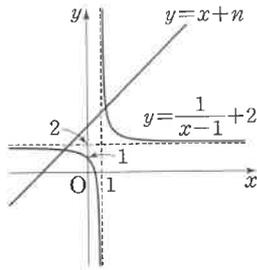
이므로

$$p+q=45+29=74$$

답 74

참고 1

함수 $y = \frac{1}{x-1} + 2$ 의 그래프와 직선 $y = x+n$ 은 그림과 같이 모든 자연수 n 에 대하여 서로 다른 두 점에서 만난다. 그러므로 이차방정식 $x^2 + (n-3)x - n + 1 = 0$ 은 모든 자연수 n 에 대하여 1이 아닌 서로 다른 두 실근을 갖는다.



참고 2

$$f(x) = x^2 + (n-3)x - n + 1 \text{이라 하자.}$$

이차방정식 $f(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = (n-3)^2 - 4(-n+1)$$

$$= n^2 - 2n + 5$$

$$= (n-1)^2 + 4 > 0$$

이고, $f(1) = 1 + n - 3 - n + 1 = -1 \neq 0$ 이므로 이차방정식 $f(x) = 0$ 은 모든 자연수 n 에 대하여 1이 아닌 서로 다른 두 실근을 갖는다.

4 $b_n = a_{2n-1}$ 이라 하면 $b_1 = a_1 = 3$ 이고 모든 자연수 n 에 대하여

$$b_{n+1} - b_n = a_{2n+1} - a_{2n-1} = 6$$

이므로 수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 3이고 공차가 6인 등차수열이다.

따라서 $a_{15} = b_8 = 3 + 7 \times 6 = 45$ 이고 모든 자연수 n 에 대하여 $a_{2n-1} + a_{2n} = 5$ 이므로

$$a_{15} + \sum_{n=1}^{15} a_n = \sum_{n=1}^7 (a_{2n-1} + a_{2n}) + 2a_{15}$$

$$= \sum_{n=1}^7 5 + 2 \times 45$$

$$= 5 \times 7 + 90$$

$$= 125$$

답 ⑤

5 자연수 k 에 대하여 $n = 2k$ 일 때,

$$a_{2k+1} = 3a_{2k-1} \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$n = 2k - 1 \text{일 때,}$$

$$a_{2k} = 2a_{2k-1} \dots\dots \textcircled{㉡}$$

①, ②에 의하여

$$a_{2k+1} = 3a_{2k-1} = 3 \times \frac{a_{2k}}{2} = \frac{3}{2} a_{2k}$$

이므로

$$a_{2k+2} = 2a_{2k+1} = 2 \times \frac{3}{2} a_{2k} = 3a_{2k} \dots\dots \textcircled{㉢}$$

①에 의하여 수열 $\{a_{2n-1}\}$ 은 첫째항이 $a_1 = 1$ 이고 공비가 3인 등비수열이고, ②, ③에 의하여 수열 $\{a_{2n}\}$ 은 첫째항이 $a_2 = 2a_1 = 2$, 공비가 3인 등비수열이다.

따라서

$$\sum_{n=1}^{10} a_n = \sum_{n=1}^5 a_{2n-1} + \sum_{n=1}^5 a_{2n}$$

$$= \sum_{n=1}^5 (1 \times 3^{n-1}) + \sum_{n=1}^5 (2 \times 3^{n-1})$$

$$= \sum_{n=1}^5 (3^{n-1} + 2 \times 3^{n-1})$$

$$= \sum_{n=1}^5 3^n$$

$$= \frac{3(3^5 - 1)}{3 - 1}$$

$$= 363$$

답 363

6 $a_n + a_{n+3} = 10$ 에서

$$a_{n+3} = 10 - a_n$$

이때 $\sum_{n=1}^3 a_n = 5$ 이므로

$$\sum_{n=4}^6 a_n = \sum_{n=1}^3 a_{n+3}$$

$$= \sum_{n=1}^3 (10 - a_n)$$

$$= \sum_{n=1}^3 10 - \sum_{n=1}^3 a_n$$

$$= 10 \times 3 - 5$$

$$= 25$$

$$\sum_{n=7}^9 a_n = \sum_{n=4}^6 a_{n+3}$$

$$= \sum_{n=4}^6 (10 - a_n)$$

$$= \sum_{n=4}^6 10 - \sum_{n=4}^6 a_n$$

$$= 10 \times 3 - 25$$

$$= 5$$

따라서

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^9 a_n &= \sum_{n=1}^3 a_n + \sum_{n=4}^6 a_n + \sum_{n=7}^9 a_n \\ &= 5 + 25 + 5 \\ &= 35 \end{aligned}$$

답 35

7 (i) a_5 의 값은 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} - a_n = 3n - 2, \text{ 즉 } a_{n+1} = a_n + (3n - 2)$$

일 때 최대가 된다.

이때 $a_1 = 4$ 이므로

$$a_2 = a_1 + 1 = 4 + 1 = 5$$

$$a_3 = a_2 + 4 = 5 + 4 = 9$$

$$a_4 = a_3 + 7 = 9 + 7 = 16$$

$$a_5 = a_4 + 10 = 16 + 10 = 26$$

그러므로 $M = 26$

(ii) a_5 의 값은 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} - a_n = -(3n - 2), \text{ 즉 } a_{n+1} = a_n - (3n - 2)$$

일 때 최소가 된다.

이때 $a_1 = 4$ 이므로

$$a_2 = a_1 - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$a_3 = a_2 - 4 = 3 - 4 = -1$$

$$a_4 = a_3 - 7 = -1 - 7 = -8$$

$$a_5 = a_4 - 10 = -8 - 10 = -18$$

그러므로 $m = -18$

따라서 $M - m = 26 - (-18) = 44$

답 ②

8 $a_2 \times a_3 \times a_4 = c$ ($c \neq 0$)이라 하자.

모든 자연수 n 에 대하여

$$a_n \times a_{n+1} \times a_{n+2} = c \quad \text{..... ㉠}$$

이므로 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} \times a_{n+2} \times a_{n+3} = c \quad \text{..... ㉡}$$

㉠ \div ㉡을 하면

$$\frac{a_{n+3}}{a_n} = \frac{c}{c} = 1, \text{ 즉 } a_{n+3} = a_n$$

그러므로

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{100} a_n &= 33 \sum_{n=1}^3 a_n + a_{100} \\ &= 33(a_1 + a_2 + a_3) + a_1 \\ &= 33(2 + a_2 + a_3) + 2 \\ &= 33(a_2 + a_3) + 68 \\ &= 233 \end{aligned}$$

에서 $a_2 + a_3 = 5$

즉,

$$\begin{aligned} a_2 \times a_3 &= a_2(5 - a_2) \\ &= -\left(a_2 - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{4} \end{aligned}$$

에서

$$a_2 \times a_3 \leq \frac{25}{4} \quad \left(\text{단, 등호는 } a_2 = a_3 = \frac{5}{2} \text{ 일 때 성립한다.}\right)$$

이므로

$$\begin{aligned} a_2 \times a_3 \times a_4 &= a_2 \times a_3 \times a_1 \\ &= a_2 \times a_3 \times 2 \leq \frac{25}{4} \times 2 = \frac{25}{2} \end{aligned}$$

따라서 $a_2 \times a_3 \times a_4$ 는 $a_2 = a_3 = \frac{5}{2}$ 일 때 최댓값 $\frac{25}{2}$ 를 갖는다.

답 ④

Level

3
실력 완성

본문 102쪽

1 ③
2 ④
3 365

1 $a_n = \begin{cases} a_{n+1} - 4 & (a_n \text{이 } 3 \text{의 배수가 아닌 경우}) \\ 3a_{n+1} & (a_n \text{이 } 3 \text{의 배수인 경우}) \end{cases}$

이고, 수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항이 30 이하의 자연수이므로 $a_n > 0$ 이어야 한다.

$a_8 = 2$ 에서 $a_7 > 0$ 이어야 하므로

$$a_7 = 3a_8 = 3 \times 2 = 6$$

(i) $a_6 = a_7 - 4 = 6 - 4 = 2$ 인 경우

$a_5 > 0$ 이어야 하므로

$$a_5 = 3a_6 = 3 \times 2 = 6$$

$$\textcircled{1} \ a_4 = a_5 - 4 = 6 - 4 = 2 \text{ 일 때}$$

$a_3 > 0$ 이어야 하므로

$$a_3 = 3a_4 = 3 \times 2 = 6$$

$$a_2 = a_3 - 4 = 6 - 4 = 2 \text{ 이면}$$

$a_1 > 0$ 이어야 하므로

$$a_1 = 3a_2 = 3 \times 2 = 6$$

$$a_2 = 3a_3 = 3 \times 6 = 18 \text{ 이면}$$

$a_1 \leq 30$ 이어야 하므로

$$a_1 = a_2 - 4 = 18 - 4 = 14$$

$$\textcircled{2} \ a_4 = 3a_5 = 3 \times 6 = 18 \text{ 일 때}$$

$a_n \leq 30$ 이어야 하므로

$$a_3 = a_4 - 4 = 18 - 4 = 14$$

$$a_2 = a_3 - 4 = 14 - 4 = 10$$

정답과 풀이

이때 $a_2 - 4 = 10 - 4 = 6$ 은 3의 배수이므로

$$a_1 = 3a_2 = 30$$

(ii) $a_6 = 3a_7 = 3 \times 6 = 18$ 인 경우

$a_n \leq 30$ 이어야 하므로

$$a_5 = a_6 - 4 = 18 - 4 = 14$$

$$a_4 = a_5 - 4 = 14 - 4 = 10$$

이때 $a_4 - 4 = 10 - 4 = 6$ 은 3의 배수이므로

$$a_3 = 3a_4 = 3 \times 10 = 30$$

마찬가지로 $a_n \leq 30$ 이어야 하므로

$$a_2 = a_3 - 4 = 30 - 4 = 26$$

$$a_1 = a_2 - 4 = 26 - 4 = 22$$

따라서 가능한 모든 a_1 의 값의 합은

$$6 + 14 + 30 + 22 = 72$$

답 ③

2. \neg . $a_n a_{n+1} = \sum_{k=1}^n a_k$ 에 $n=1$ 을 대입하면 $a_1 a_2 = a_1$

$$a_1 \neq 0 \text{이므로 } a_2 = 1 \text{ (참)}$$

\perp . $a_n a_{n+1} = \sum_{k=1}^n a_k$ 에서 n 대신 $n+1$ 을 대입하면

$$\begin{aligned} a_{n+1} a_{n+2} &= \sum_{k=1}^{n+1} a_k = \sum_{k=1}^n a_k + a_{n+1} = a_n a_{n+1} + a_{n+1} \\ &= a_{n+1} (a_n + 1) \end{aligned}$$

모든 자연수 n 에 대하여 $a_{n+1} > 0$ 이므로

$$a_{n+2} = a_n + 1 \text{ (거짓)}$$

\ulcorner . $a_{2n+1} = a_{2n-1} + 1$ 이므로 $a_1 = 3$ 이면

$$a_{2n-1} = 3 + (n-1) \times 1 = n + 2 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

\neg 에서 $a_2 = 1$ 이고 $a_{2n+2} = a_{2n} + 1$ 이므로

$$a_{2n} = 1 + (n-1) \times 1 = n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

그러므로

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{10} a_n &= \sum_{n=1}^5 a_{2n-1} + \sum_{n=1}^5 a_{2n} \\ &= \sum_{n=1}^5 (n+2) + \sum_{n=1}^5 n \\ &= \sum_{n=1}^5 (2n+2) \\ &= 2 \sum_{n=1}^5 n + \sum_{n=1}^5 2 \\ &= 2 \times \frac{5 \times 6}{2} + 2 \times 5 \\ &= 40 \text{ (참)} \end{aligned}$$

이상에서 옳은 것은 \neg , \ulcorner 이다.

답 ④

3. $(2n-1)a_n + 2S_n = 2$ 에 $n=1$ 을 대입하면

$$a_1 + 2S_1 = a_1 + 2a_1 = 3a_1 = 2 \text{이므로 } a_1 = \frac{2}{3}$$

$$(2n-1)a_n + 2S_n = 2 \quad \text{..... } \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 에서 n 대신 $n+1$ 을 대입하면

$$(2n+1)a_{n+1} + 2S_{n+1} = 2 \quad \text{..... } \textcircled{2}$$

$\textcircled{2} - \textcircled{1}$ 을 하면

$$(2n+1)a_{n+1} - (2n-1)a_n + 2(S_{n+1} - S_n) = 0$$

$$(2n+1)a_{n+1} - (2n-1)a_n + 2a_{n+1} = 0$$

$$(2n+3)a_{n+1} = (2n-1)a_n$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{2n+3}{2n-1} \quad \text{..... } \textcircled{3}$$

$\textcircled{3}$ 의 n 에 5, 6, 7, 8, 9를 차례로 대입하여 번끼리 곱하면

$$\frac{a_5}{a_6} \times \frac{a_6}{a_7} \times \frac{a_7}{a_8} \times \frac{a_8}{a_9} \times \frac{a_9}{a_{10}} = \frac{13}{9} \times \frac{15}{11} \times \frac{17}{13} \times \frac{19}{15} \times \frac{21}{17}$$

$$\frac{a_5}{a_{10}} = \frac{19 \times 21}{9 \times 11} = \frac{133}{33}$$

이때 $a_1 = \frac{2}{3}$ 이므로

$$\frac{a_1 a_5}{a_{10}} = \frac{2}{3} \times \frac{133}{33} = \frac{266}{99}$$

따라서 $p=99$, $q=266$ 이므로

$$p+q=365$$

답 365