



# 수능특강

수학영역 기하

정답과 풀이

# 01 포물선

유제		본문 5~9쪽	
1	③	2	153
3	4	4	①
5	⑤		
6	⑤		

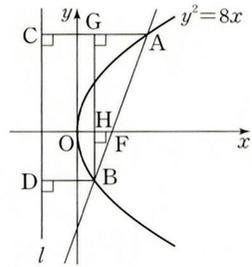
**1** 포물선  $x^2=4y$ 의 초점은  $F(0, 1)$ 이고 준선의 방정식은  $y=-1$ 이다.  
 점 P의 좌표를  $(a, b)$ 라 하면 점 P가 포물선  $x^2=4y$  위의 점이므로  
 $a^2=4b$   
 포물선의 정의에 의하여  $\overline{PF}=b+1=5$ 이므로  
 $b=4$   
 $a^2=16$   
 따라서  $\overline{OP}=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{16+16}=4\sqrt{2}$

답 ③

**2** 포물선  $y^2=8x$ 의 초점은  $F(2, 0)$ 이고 준선의 방정식은  $x=-2$ 이다.  
 $\overline{AC}=6$ 이므로 점 A의  $x$ 좌표는 4이고, 점 A는 포물선  $y^2=8x$  위의 제1사분면에 있는 점이므로 점 A의 좌표는  $(4, 4\sqrt{2})$ 이다.  
 두 점  $A(4, 4\sqrt{2})$ ,  $F(2, 0)$ 을 지나는 직선의 방정식은  $y=2\sqrt{2}(x-2)$   
 이므로 점 B의  $x$ 좌표는  $\{2\sqrt{2}(x-2)\}^2=8x$ 에서  
 $x^2-5x+4=0$ ,  $(x-1)(x-4)=0$   
 $x=1$  또는  $x=4$   
 $x < 4$ 이므로  $x=1$ 이고,  
 점 B는 포물선  $y^2=8x$  위의 제4사분면에 있는 점이므로 점 B의 좌표는  $(1, -2\sqrt{2})$   
 포물선의 정의에 의하여  $\overline{AC}=\overline{AF}$ ,  $\overline{BD}=\overline{BF}$ 이고,  $\overline{AC}=6$ ,  $\overline{BD}=3$ 이므로  
 $\overline{AB}=\overline{AF}+\overline{BF}=6+3=9$   
 $\overline{CD}=2\sqrt{2}+4\sqrt{2}=6\sqrt{2}$   
 따라서  $\overline{AB}^2+\overline{CD}^2=9^2+(6\sqrt{2})^2=153$

답 153

## 다른 풀이



그림과 같이 점 B에서 선분 AC와  $x$ 축에 내린 수선의 발을 각각 G, H라 하자.

포물선의 정의에 의하여

$$\overline{AF}=\overline{AC}=6$$

$$\overline{BF}=\overline{BD}$$

이때  $\overline{BF}=\overline{BD}=a$  라 하면  $y^2=8x$ 에서 초점은  $F(2, 0)$ 이므로

$$\overline{FH}=4-a$$

$$\overline{AG}=6-a$$

삼각형 BFH와 삼각형 BAG가 서로 닮음이므로

$$\overline{BF}:\overline{BA}=\overline{FH}:\overline{AG}$$

$$a:(a+6)=(4-a):(6-a)$$

$$(a+6)(4-a)=a(6-a)$$

$$a=3$$

삼각형 BAG에서

$$\overline{BA}=\overline{BF}+\overline{FA}=3+6=9$$

$$\overline{AG}=3$$

$$\overline{BG}=\sqrt{\overline{BA}^2-\overline{AG}^2}=\sqrt{9^2-3^2}=6\sqrt{2}$$

따라서

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2+\overline{CD}^2 &= \overline{BA}^2+\overline{BG}^2 \\ &= 9^2+(6\sqrt{2})^2 \\ &= 153 \end{aligned}$$

**3** 포물선  $(x-a)^2=by+c$ 는 포물선  $x^2=by$ 를  $x$ 축의 방향으로  $a$ 만큼,  $y$ 축의 방향으로  $-\frac{c}{b}$ 만큼 평행이동한 것이다.

포물선  $x^2=by$ 의 초점의 좌표가  $(0, \frac{b}{4})$ 이고 준선의 방정식은

이  $y=-\frac{b}{4}$ 이므로 포물선  $(x-a)^2=by+c$ 의 초점의 좌표

는  $(a, \frac{b}{4}-\frac{c}{b})$ 이고 준선의 방정식은  $y=-\frac{b}{4}-\frac{c}{b}$ 이다.

즉,  $a=2$ ,  $\frac{b}{4}-\frac{c}{b}=2$ 이고,  $k=-\frac{b}{4}-\frac{c}{b}$ 이다.

$a+b+c=10$ 에서  $c=8-b$ 이므로

$$\frac{b}{4} - \frac{8-b}{b} = 2$$

$$b^2 - 4b - 32 = 0, (b+4)(b-8) = 0$$

$$b = -4 \text{ 또는 } b = 8$$

$b = 8$ 일 때  $c = 0$ 이므로  $c \neq 0$ 이라는 조건을 만족시키지 않는다.

따라서  $b = -4, c = 12$ 이므로

$$k = -\frac{-4}{4} - \frac{12}{-4} = 4$$

답 4

**다른 풀이**

포물선 위의 임의의 점  $P(x, y)$ 에서 준선  $y = k$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H의 좌표는  $(x, k)$ 이다.

점  $(2, 2)$ 를 F라 하면 포물선의 정의에 의하여  $\overline{PF} = \overline{PH}$ 이므로

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2} = |y-k|$$

이 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$$(x-2)^2 = (4-2k)y + k^2 - 4$$

즉,  $a = 2, b = 4 - 2k, c = k^2 - 4$ 이므로

$$a + b + c = k^2 - 2k + 2 = 10 \text{에서}$$

$$k^2 - 2k - 8 = 0, (k+2)(k-4) = 0$$

$$k = -2 \text{ 또는 } k = 4$$

이때  $k = -2$ 이면  $c = 0$ 이 되어  $c \neq 0$ 이라는 조건을 만족시키지 않는다.

따라서  $k = 4$

4  $y = x + n$ 을  $y^2 = kx$ 에 대입하면

$$(x+n)^2 = kx$$

$$x^2 + (2n-k)x + n^2 = 0 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$x$ 에 대한 이차방정식 ㉠의 판별식을  $D$ 라 하면

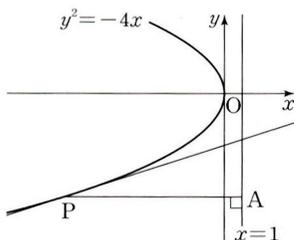
$$D = (2n-k)^2 - 4n^2 = k^2 - 4nk = k(k-4n) < 0$$

$$0 < k < 4n \text{에서 } f(n) = 4n - 1$$

$$\text{따라서 } f(1) + f(2) + f(3) = 3 + 7 + 11 = 21$$

답 ①

5



포물선  $y^2 = -4x$ 의 초점의 좌표는  $(-1, 0)$ 이고, 준선  $l$ 의 방정식은  $x = 1$ 이다.

점 P의 좌표를  $(a, b)$ 라 하면 점 P는 포물선  $y^2 = -4x$  위의 점이므로  $b^2 = -4a$ 이고,  $a \leq 0$ 이다.

점 P에서 준선  $l$ 에 내린 수선의 발 A에 대하여  $\overline{PA} = 10$ 이므로

$$-a + 1 = 10 \text{에서 } a = -9$$

$$b^2 = -4a = 36 \text{에서 } b = -6 \text{ 또는 } b = 6$$

이때 점 P에서의 접선의 기울기가 양수이므로 점 P의 좌표는  $(-9, -6)$ 이다.

따라서 점 P에서의 접선의 방정식은

$$-6y = 2 \times (-1)(x-9), \text{ 즉 } y = \frac{1}{3}x - 3$$

이므로 접선의  $y$ 절편은  $-3$ 이다.

답 ⑤

6 접점의 좌표를  $(x_1, y_1)$ 이라 하면 접선의 방정식은

$$y_1 y = 6(x + x_1)$$

이고, 점  $A(-3, a)$ 가 이 접선 위에 있으므로

$$ay_1 = 6(-3 + x_1) \quad \dots\dots \text{㉠}$$

또 점  $(x_1, y_1)$ 은 포물선  $y^2 = 12x$  위의 점이므로

$$y_1^2 = 12x_1 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠에서  $y_1 = \frac{6(-3+x_1)}{a}$ 이고, 이 식을 ㉡에 대입하면

$$\frac{36(x_1-3)^2}{a^2} = 12x_1$$

$$3x_1^2 - (18+a^2)x_1 + 27 = 0$$

이때 선분 PQ의 중점 M의  $x$ 좌표가 5이므로 두 점 P, Q의  $x$ 좌표의 합은 10이다.

$$\text{즉, } \frac{18+a^2}{3} = 10 \text{이므로 } a^2 = 12$$

$$a > 0 \text{이므로 } a = 2\sqrt{3}$$

$$\text{이차방정식 } 3x_1^2 - 30x_1 + 27 = 0, \text{ 즉 } x_1^2 - 10x_1 + 9 = 0 \text{에서}$$

$$(x_1-1)(x_1-9) = 0$$

$$x_1 = 1 \text{ 또는 } x_1 = 9$$

㉠에서

$$x_1 = 1 \text{일 때 } y_1 = -2\sqrt{3} \text{이고, } x_1 = 9 \text{일 때 } y_1 = 6\sqrt{3}$$

즉, 점 M의 좌표는  $(5, 2\sqrt{3})$ 이고, 점 A의 좌표가

$$(-3, 2\sqrt{3}) \text{이므로}$$

$$\overline{AM} = 5 - (-3) = 8$$

따라서  $a^2 = 12, b = 8$ 이므로

$$a^2 + b^2 = 12 + 64 = 76$$

답 ⑤

참고

㉠에서  $x_1 = \frac{ay_1 + 18}{6}$  이고, 이 식을 ㉡에 대입하면

$$y_1^2 = 12 \times \frac{ay_1 + 18}{6}, y_1^2 - 2ay_1 - 36 = 0$$

즉, 두 점 P, Q의  $y$ 좌표의 곱은  $-36$ 이다.

접점  $(x_1, y_1)$ 에서의 접선의 방정식이  $y_1y = 6(x + x_1)$ 이므로 두 점 P, Q의  $y$ 좌표를 각각  $\alpha, \beta$ 라 하면 두 접선의 기울기의 곱은

$$\frac{6}{\alpha} \times \frac{6}{\beta} = \frac{36}{\alpha\beta} = -\frac{36}{36} = -1$$

에서 두 접선은 서로 수직이다.

즉,  $\angle PAQ = \frac{\pi}{2}$ 이고, 세 점 P, A, Q는 중심이 M, 지름이 선분 PQ인 원 위에 있다.

Level

1 기초 연습

본문 10~11쪽

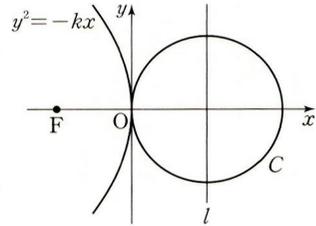
- |     |      |     |      |     |
|-----|------|-----|------|-----|
| 1 ② | 2 20 | 3 ② | 4 24 | 5 ③ |
| 6 ⑤ | 7 ③  | 8 ⑤ |      |     |

- 1 포물선  $y^2 = 4x$ 의 초점은  $F(1, 0)$ 이고 준선의 방정식은  $x = -1$ 이므로 점 P의 좌표는  $(-1, 0)$ 이다.  
 한편, 포물선의 정의에 의하여 선분 BF의 길이는 점 B와 직선  $x = -1$  사이의 거리와 같고,  $\overline{BF} = 4$ 이므로 점 B의  $x$ 좌표는 3이다. 점 B가 포물선  $y^2 = 4x$  위의 점이므로  $y^2 = 12$ 에서 점 B의  $y$ 좌표는  $2\sqrt{3}$ 이다.  
 즉, 점 B의 좌표는  $(3, 2\sqrt{3})$ 이다.  
 이때 두 점 P, B를 지나는 직선의 방정식은  $y = \frac{\sqrt{3}}{2}(x+1)$   
 이 직선이 포물선  $y^2 = 4x$ 와 만나는 두 점이 A, B이므로  $\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}(x+1)\right\}^2 = 4x$ 에서  $3x^2 - 10x + 3 = 0, (3x-1)(x-3) = 0$   
 $x = \frac{1}{3}$  또는  $x = 3$   
 즉, 점 A의  $x$ 좌표는  $\frac{1}{3}$ 이다.  
 따라서 포물선의 정의에 의하여 선분 AF의 길이는 점 A와 직선  $x = -1$  사이의 거리와 같으므로 선분 AF의 길이는

$$1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

답 ②

2



원과 포물선이 만나는 한 점을 A라 하면 포물선의 정의에 의하여 점 A와 준선 사이의 거리는 선분 AF의 길이와 같으므로 포물선과 만나는 점이 존재하는 원의 넓이가 최소하려면 이 원의 중심은 점 F를  $y$ 축에 대하여 대칭이동시킨 점이어야 하고 원점 O에 대하여 반지름의 길이는 선분 FO의 길이와 같아야 한다.

한편,  $\overline{PF}$ 의 최댓값이 15이므로

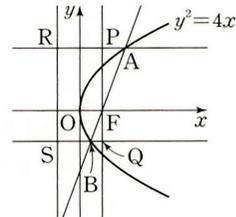
$$3 \times \overline{FO} = 15, \overline{FO} = 5$$

따라서  $y^2 = -kx = 4 \times \left(-\frac{k}{4}\right)x$ 이므로 점 F의 좌표는

$$\left(-\frac{k}{4}, 0\right) \text{이고, } \frac{k}{4} = 5 \text{에서 } k = 20$$

답 20

3



포물선  $y^2 = 4x$ 에서 초점은  $F(1, 0)$ , 준선의 방정식은  $x = -1$ 이다.

그림과 같이 초점 F를 지나고  $y$ 축에 평행한 직선이 점 A를 지나고  $x$ 축에 평행한 직선과 만나는 점을 P, 점 B를 지나고  $x$ 축에 평행한 직선과 만나는 점을 Q라 하자.

또 준선과 직선 PA가 만나는 점을 R, 준선과 직선 BQ가 만나는 점을 S라 하자.

포물선의 정의에 의하여

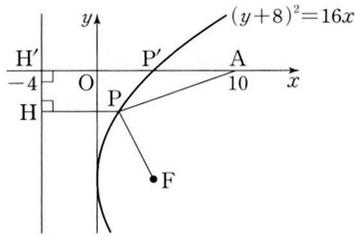
$$\overline{AR} = \overline{AF} = 3, \overline{BS} = \overline{BF}$$

$$\text{이므로 } \overline{AP} = 1, \overline{BQ} = 2 - \overline{BF}$$

이때 삼각형 APF와 삼각형 BQF가 서로 닮음이므로  
 $\overline{AP} : \overline{BQ} = \overline{AF} : \overline{BF}$ 에서  
 $1 : (2 - \overline{BF}) = 3 : \overline{BF}$   
 $3(2 - \overline{BF}) = \overline{BF}$   
 $\overline{BF} = \frac{3}{2}$

답 ②

4



포물선  $(y+8)^2=16x$ 는 포물선  $y^2=16x$ 를  $y$ 축의 방향으로  $-8$ 만큼 평행이동한 것이므로 점 F는 포물선  $y^2=16x$ 의 초점  $(4, 0)$ 을  $y$ 축의 방향으로  $-8$ 만큼 평행이동한 것이다.

즉, 점 F의 좌표는  $(4, -8)$ 이고 준선의 방정식은  $x = -4$ 이다.

한편, 점 P와 점 A에서 준선  $x = -4$ 에 내린 수선의 발을 각각 H, H'이라 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{PF} = \overline{PH} \text{이므로}$$

$$\overline{AP} + \overline{PF} = \overline{AP} + \overline{PH} \geq \overline{AH'} = 4 + 10 = 14$$

그러므로  $\overline{AP} + \overline{PF}$ 의 값이 최소가 되는 점 P, 즉 점 P'은 선분 AH'과 포물선이 만나는 점이다.

삼각형 AP'F의 둘레의 길이는

$$\overline{AP'} + \overline{P'F} + \overline{FA} = 14 + \overline{FA}$$

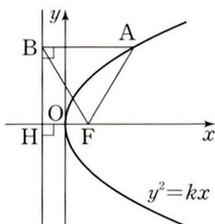
이고, 점 F와 점 A의 좌표가 각각  $(4, -8)$ ,  $(10, 0)$ 이므로

$$\overline{FA} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$

따라서 삼각형 AP'F의 둘레의 길이는 24이다.

답 24

5



포물선  $y^2=kx$ 의 초점은  $F(\frac{k}{4}, 0)$ 이고 준선의 방정식은  $x = -\frac{k}{4}$ 이다.

점 F에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{FH} = 2 \times \frac{k}{4} = \frac{k}{2}$$

한편, 포물선의 정의에 의하여  $\overline{AB} = \overline{AF}$ 이고, 주어진 조건에서  $\overline{AF} = \overline{BF}$ 이므로 삼각형 ABF는 정삼각형이다.

$$\angle ABF = \angle BFH = \frac{\pi}{3} \text{이므로}$$

삼각형 BFH에서  $\cos(\angle BFH) = \frac{\overline{FH}}{\overline{BF}}$

$$\frac{1}{2} = \frac{\frac{k}{2}}{\overline{BF}}, \text{ 즉 } \overline{BF} = k$$

따라서 삼각형 ABF의 넓이가  $10\sqrt{3}$ 이므로

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times k^2 = 10\sqrt{3}, k^2 = 40$$

$$k > 0 \text{이므로 } k = 2\sqrt{10}$$

답 ③

6  $y=kx+1$ 을  $y^2=12x$ 에 대입하면

$$(kx+1)^2=12x, k^2x^2+2(k-6)x+1=0$$

이때  $k$ 는 자연수이므로  $k \neq 0$ 이다.

$x$ 에 대한 이차방정식  $k^2x^2+2(k-6)x+1=0$ 의 판별식을  $D$ 라 할 때

$$\frac{D}{4} = (k-6)^2 - k^2 = -12k + 36$$

$$1 \leq k < 3 \text{이면 } \frac{D}{4} > 0 \text{이므로 } f(k) = 2$$

$$k = 3 \text{이면 } \frac{D}{4} = 0 \text{이므로 } f(3) = 1$$

$$k > 3 \text{이면 } \frac{D}{4} < 0 \text{이므로 } f(k) = 0$$

$$\text{따라서 } f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 2 + 2 + 1 + 0 = 5$$

답 ⑤

7 꼭짓점이 원점이고 준선의 방정식이  $x=4$ 인 포물선의 초점의 좌표는  $(-4, 0)$ 이므로 이 포물선의 방정식은  $y^2 = -16x$ 이다.

포물선  $y^2 = -16x$  위의 점  $(a, b)$ 에서의 접선의 방정식은  $by = 2 \times (-4) \times (x+a)$ , 즉  $by = -8(x+a)$

이 접선의 기울기가  $-2$ 이므로

$y = -\frac{8}{b}x - \frac{8a}{b}$ 에서  $-\frac{8}{b} = -2, b = 4$   
 또 점  $(a, 4)$ 가 포물선  $y^2 = -16x$  위의 점이므로  
 $16 = -16a$ 에서  $a = -1$   
 따라서  $a + b = -1 + 4 = 3$

**다른 풀이**

꼭짓점이 원점이고 준선의 방정식이  $x = 4$ 인 포물선의 초점의 좌표는  $(-4, 0)$ 이므로 이 포물선의 방정식은  $y^2 = -16x$ 이다.

포물선  $y^2 = -16x$ 에 접하고 기울기가  $-2$ 인 직선의 방정식은

$$y = -2x + \frac{-4}{-2}, \text{ 즉 } y = -2x + 2$$

이 직선이 점  $(a, b)$ 를 지나므로

$$b = -2a + 2 \quad \dots \text{㉠}$$

또 점  $(a, b)$ 는 포물선  $y^2 = -16x$  위의 점이므로

$$b^2 = -16a \quad \dots \text{㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$(-2a + 2)^2 = -16a, a^2 - 2a + 1 = -4a, (a + 1)^2 = 0$$

$$a = -1, b = 4$$

따라서  $a + b = -1 + 4 = 3$

답 ③

8 점점의 좌표를  $(x_1, y_1)$ 이라 하면 접선의 방정식은

$$y_1 y = 2 \times \frac{1}{2} \times (x + x_1), \text{ 즉 } y_1 y = x + x_1$$

이 직선이 점  $(-2, 0)$ 을 지나므로  $x_1 = 2$

이때 점  $(x_1, y_1)$ 은 포물선  $y^2 = 2x$  위의 점이므로

$$y_1^2 = 2x_1 \text{에서 } y_1^2 = 4$$

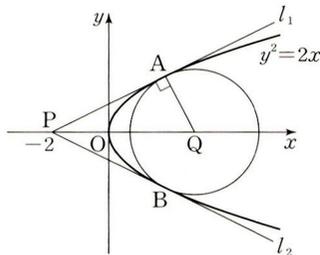
$$y_1 = 2 \text{ 또는 } y_1 = -2$$

즉, 두 점점의 좌표는  $(2, 2), (2, -2)$ 이다.

점  $(-2, 0)$ 을 P, 원의 중심을 Q, 점  $(2, 2)$ 를 A라 하면

직선 PA의 방정식은  $2y = x + 2$ , 즉  $y = \frac{1}{2}x + 1$ 이므로 직선

PA의 기울기는  $\frac{1}{2}$ 이다.



삼각형 APQ에서  $\angle PAQ = \frac{\pi}{2}$ 이고  $\tan(\angle APQ) = \frac{1}{2}$

이므로

$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{AQ}}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{2}$$

$$\overline{AQ} = \sqrt{5}$$

따라서 원의 반지름의 길이는  $\sqrt{5}$ 이므로 구하는 원의 넓이는  $5\pi$

답 ⑤

**다른 풀이**

점점의 좌표를  $(x_1, y_1)$ 이라 하면 접선의 방정식은

$$y_1 y = 2 \times \frac{1}{2} \times (x + x_1), \text{ 즉 } y_1 y = x + x_1$$

이 직선이 점  $(-2, 0)$ 을 지나므로  $x_1 = 2$

이때 점  $(x_1, y_1)$ 은 포물선  $y^2 = 2x$  위의 점이므로

$$y_1^2 = 2x_1 \text{에서 } y_1^2 = 4$$

$$y_1 = 2 \text{ 또는 } y_1 = -2$$

즉, 두 점점의 좌표는  $(2, 2), (2, -2)$ 이다.

또 점  $(-2, 0)$ 을 P, 원의 중심을 Q, 점  $(2, 2)$ 를 A라 하면 직선 PA의 방정식은

$$2y = x + 2, \text{ 즉 } y = \frac{1}{2}x + 1$$

직선 PA와 수직이고 점 A를 지나는 직선이 x축과 만나는 점이 Q이므로 직선 PA와 수직이고 점 A를 지나는 직선의 방정식은

$$y - 2 = -2(x - 2), \text{ 즉 } y = -2x + 6$$

$y = 0$ 을 대입하면  $x = 3$ 이므로 점 Q의 좌표는  $(3, 0)$ 이다.

따라서  $\overline{AQ} = \sqrt{(3-2)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{5}$ 이므로 구하는 원의 넓이는  $5\pi$

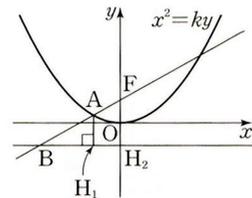
Level

**2 기본 연습**

본문 12~13쪽

- 1 27    2 ②    3 ④    4 ③    5 ④  
 6 ②

1



점 A에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을  $H_1$ , 포물선의 준선이  $y$ 축과 만나는 점을  $H_2$ 라 하고, 두 점 A, F를 지나는 직선이 포물선의 준선과 만나는 점을 B라 하자.

포물선의 정의에 의하여  $\overline{AH_1} = \overline{AF} = \sqrt{3}$ 이고,

$\angle BAH_1 = \angle AFO = \frac{\pi}{3}$ 이므로 삼각형  $ABH_1$ 에서

$$\overline{BA} = \frac{\overline{AH_1}}{\cos \frac{\pi}{3}} = 2\sqrt{3}$$

포물선  $x^2 = ky$ 의 초점은  $F(0, \frac{k}{4})$ , 준선의 방정식은

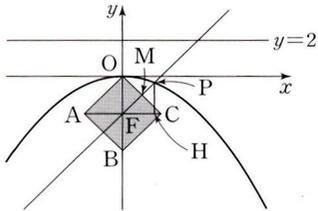
$y = -\frac{k}{4}$ 이므로 삼각형  $FBH_2$ 에서

$$\overline{BF} = \frac{\overline{FH_2}}{\cos \frac{\pi}{3}} = 2\left(\frac{k}{4} + \frac{k}{4}\right) = k$$

따라서  $k = \overline{BF} = \overline{BA} + \overline{AF} = 2\sqrt{3} + \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$ 이므로  $k^2 = 27$

답 27

2



정사각형  $OABC$ 에서  $\overline{OA} = 2\sqrt{2}$ 이므로  $\overline{OF} = 2$ 이고, 점 F의 좌표는  $(0, -2)$ 이다.

점 P를 지나고  $y$ 축에 평행한 직선이 선분 AC와 만나는 점을 H라 하고  $\overline{PH} = t$ 라 하면  $\angle MFC = \frac{\pi}{4}$ 이므로  $\overline{FH} = t$ 이다.

즉, 점 F의 좌표가  $(0, -2)$ 이므로 점 P의 좌표는  $(t, -2+t)$

한편, 꼭짓점이 O이고 초점이 F인 포물선에서  $\overline{OF} = 2$ 이므로 직선  $y=2$ 는 이 포물선의 준선이고 포물선의 정의에 의하여 점 P와 직선  $y=2$  사이의 거리는 선분 PF의 길이와 같다.

이때 점 P의 좌표가  $(t, -2+t)$ 이므로 점 P와 직선  $y=2$  사이의 거리는  $2 - (-2+t) = 4-t$ 이고,

$$\overline{PF} = \sqrt{2}t$$

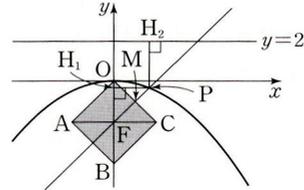
즉,  $4-t = \sqrt{2}t$ 에서  $t > 0$ 이므로  $t = -4 + 4\sqrt{2}$

따라서 점 P와 직선  $y=2$  사이의 거리는

$$4-t = 4 - (-4 + 4\sqrt{2}) = 8 - 4\sqrt{2}$$

답 ②

다른 풀이



정사각형  $OABC$ 에서  $\overline{OA} = 2\sqrt{2}$ 이므로  $\overline{OF} = 2$ 이고, 점 F의 좌표는  $(0, -2)$ 이다.

점 P에서  $y$ 축과 직선  $y=2$ 에 내린 수선의 발을 각각  $H_1$ ,  $H_2$ 라 하고,  $\overline{PF} = k$ 라 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{PH_2} = \overline{PF} = k$$

삼각형  $PH_1F$ 에서  $\angle PFH_1 = \frac{\pi}{4}$ 이므로

$$\overline{PH_1} = k \times \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}k, \overline{FH_1} = \overline{FH_2}$$

점 F와 직선  $y=2$  사이의 거리는 4이므로

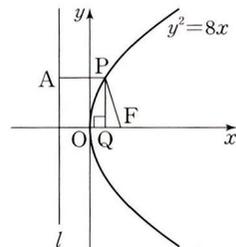
$$\overline{FH_1} + \overline{PH_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}k + k = 4$$

$$k = \frac{8}{\sqrt{2}+2} = 8 - 4\sqrt{2}$$

따라서 점 P와 직선  $y=2$  사이의 거리는

$$\overline{PH_2} = 8 - 4\sqrt{2}$$

3



포물선  $y^2 = 8x$ 의 초점은  $F(2, 0)$ , 준선의 방정식은  $x = -2$ 이다.

점 P를 지나고  $x$ 축에 평행한 직선이 준선  $l$ 과 만나는 점을 A라 할 때, 포물선의 정의에 의하여  $\overline{PA} = \overline{PF} = 3$ 이고, 원점 O와 준선  $l$  사이의 거리가 2이므로 점 Q의 좌표는  $(1, 0)$ 이다.

이때 점 F와 점 Q를  $x$ 축의 방향으로  $-2$ 만큼 평행이동한 점을 각각  $F'$ ,  $Q'$ 이라 하면 점  $F'$ 과 점  $Q'$ 의 좌표는 각각  $(0, 0)$ ,  $(-1, 0)$

꼭짓점이  $F'$ 이고 초점이  $Q'$ 인 포물선의 방정식은  $y^2 = -4x$ 이고, 이 포물선을 다시  $x$ 축의 방향으로  $2$ 만큼 평행이동한 포물선을  $C$ 라 하면 포물선  $C$ 의 방정식은

$$y^2 = -4(x-2)$$

직선  $l$ 의 방정식이  $x = -2$ 이므로

$$y^2 = -4(x-2) \text{에 } x = -2 \text{를 대입하면}$$

$$y^2 = -4 \times (-2-2) = 16$$

$$y = 4 \text{ 또는 } y = -4$$

즉, 포물선  $C$ 가 직선  $l$ 과 만나는 두 점 사이의 거리는  $8$ 이다.

답 ④

4 포물선  $P_1: x^2 + 4x - 4y + 16 = 0$ 은

$$x^2 + 4x + 4 = 4y - 12$$

$$(x+2)^2 = 4(y-3)$$

이므로 포물선  $P_1$ 은 포물선  $x^2 = 4y$ 를  $x$ 축의 방향으로  $-2$ 만큼,  $y$ 축의 방향으로  $3$ 만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선  $x^2 = 4y$ 의 초점의 좌표는  $(0, 1)$ 이고 준선의 방정식은  $y = -1$ 이므로 포물선  $P_1$ 의 초점  $F_1$ 의 좌표는  $(-2, 4)$ 이고 준선의 방정식은  $y = 2$ 이다.

$$\text{포물선 } P_2: (y+a)^2 = 4x - 16 \text{은}$$

$$(y+a)^2 = 4(x-4)$$

이므로 포물선  $P_2$ 는 포물선  $y^2 = 4x$ 를  $x$ 축의 방향으로  $4$ 만큼,  $y$ 축의 방향으로  $-a$ 만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선  $y^2 = 4x$ 의 초점의 좌표는  $(1, 0)$ 이고 준선의 방정식은  $x = -1$ 이므로 포물선  $P_2$ 의 초점  $F_2$ 의 좌표는  $(5, -a)$ 이고 준선의 방정식은  $x = 3$ 이다.

두 포물선  $P_1, P_2$ 의 준선의 교점  $(3, 2)$ 를 중심으로 하는 원이 두 점  $F_1, F_2$ 를 지나므로 원의 중심  $(3, 2)$ 와 두 점  $F_1, F_2$ 에 이르는 거리가 같다.

$$\text{즉, } \sqrt{(-2-3)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{(5-3)^2 + (-a-2)^2}$$

이 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$$(a+2)^2 = 25$$

$$a+2 = -5 \text{ 또는 } a+2 = 5$$

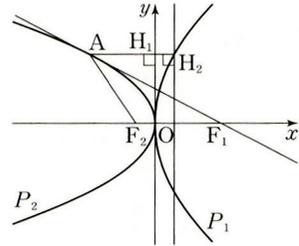
$$a = -7 \text{ 또는 } a = 3$$

따라서 모든 실수  $a$ 의 값의 곱은

$$-7 \times 3 = -21$$

답 ③

5



$$\text{포물선 } P_1: y^2 = 28x \text{의 초점은 } F_1(7, 0) \quad \dots\dots \text{㉠}$$

이고 준선의 방정식은  $x = -7$ 이다.

$$\text{포물선 } P_2: y^2 = kx \text{의 초점은 } F_2\left(\frac{k}{4}, 0\right) \text{이고 준선의 방정}$$

식은  $x = -\frac{k}{4}$ 이다.

점 A의 좌표를  $(x_1, y_1)$ 이라 하면 점 A는 포물선  $y^2 = kx$  위에 있으므로  $y_1^2 = kx_1$

또 점 A  $(x_1, y_1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y_1 y = 2 \times \frac{k}{4}(x + x_1), \text{ 즉 } y_1 y = \frac{k}{2}(x + x_1)$$

$$\text{이 접선이 점 } F_1(7, 0) \text{을 지나므로 } 0 = \frac{k}{2}(7 + x_1)$$

$$k \neq 0 \text{이므로 } x_1 = -7$$

점 A에서  $y$ 축과 포물선  $P_2$ 의 준선에 내린 수선의 발을 각각  $H_1, H_2$ 라 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{AH_2} = \overline{AF_2} = 9 \text{이고,}$$

$$\overline{AH_2} = \overline{AH_1} + \overline{H_1H_2} = 7 + \overline{H_1H_2} = 9$$

$$\text{에서 } \overline{H_1H_2} = 2$$

즉, 포물선  $P_2: y^2 = kx$ 의 준선의 방정식이  $x = 2$ 이므로

$$\text{포물선 } P_2 \text{의 초점은 } F_2(-2, 0) \quad \dots\dots \text{㉡}$$

$$\frac{k}{4} = -2 \text{이므로 } k = -8$$

점 A  $(-7, y_1)$ 은 포물선  $P_2: y^2 = -8x$  위의 점이므로  $y_1^2 = 56$

$$y_1 > 0 \text{이므로 } y_1 = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$$

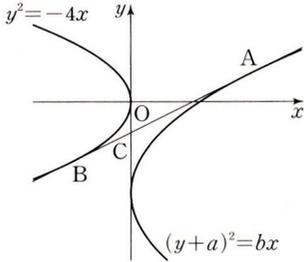
$$\text{즉, 점 A의 좌표는 } (-7, 2\sqrt{14}) \quad \dots\dots \text{㉢}$$

따라서 ㉠, ㉡, ㉢에서 삼각형  $AF_2F_1$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 9 \times 2\sqrt{14} = 9\sqrt{14}$$

답 ④

6



두 점 A, B의 좌표를 각각  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 라 하자.

$\overline{AC} = 2\overline{BC}$ 에서  $\overline{AC} : \overline{BC} = 2 : 1$ 이므로

선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점

$(\frac{2x_2+x_1}{2+1}, \frac{2y_2+y_1}{2+1})$ 이 점 C(0, -2)이다.

즉,  $2x_2+x_1=0, 2y_2+y_1=-6$ 이므로

$x_1=-2x_2, y_1=-2y_2-6$  ..... ㉠

또 포물선  $y^2=-4x$  위의 점 B( $x_2, y_2$ )에서의 접선의 방정

식은  $y_2y=-2(x+x_2)$ 이고,

점 B가 포물선  $y^2=-4x$  위의 점이므로

$y_2^2=-4x_2$  ..... ㉡

점 C(0, -2)가 직선  $y_2y=-2(x+x_2)$  위의 점이므로

$-2y_2=-2x_2$ , 즉  $x_2=y_2$

㉡에서  $y_2^2=-4y_2$

$y_2 \neq 0$ 이므로  $y_2=-4, x_2=-4$

이것을 ㉠에 대입하면  $x_1=8, y_1=2$

즉, 점 A의 좌표는 (8, 2), 점 B의 좌표는 (-4, -4)이고,

직선 AB의 방정식은  $y=\frac{1}{2}x-2$ 이다.

한편, 직선  $y=\frac{1}{2}x-2$ 는 포물선  $(y+a)^2=bx$ 의 접선이므로

로  $x=2y+4$ 를  $(y+a)^2=bx$ 에 대입하면

$(y+a)^2=b(2y+4)$

$y^2+2(a-b)y+a^2-4b=0$

$y$ 에 대한 이차방정식  $y^2+2(a-b)y+a^2-4b=0$ 의 판별

식을  $D$ 라 하면

$$\frac{D}{4} = (a-b)^2 - a^2 + 4b = b^2 + 4b - 2ab$$

$$= b(b+4-2a) = 0$$

$b > 0$ 이므로  $b=2a-4$

이때 점 A(8, 2)는 포물선  $(y+a)^2=bx$  위의 점이므로

$(2+a)^2=8b, (2+a)^2=8(2a-4)$

$a^2-12a+36=0, (a-6)^2=0$

$a=6, b=8$

따라서  $a+b=6+8=14$

답 ②

참고

포물선  $(y+a)^2=bx$ 의 꼭짓점을 D, 점 A에서  $y$ 축에 내린 수선의 발을 H라 하면  $\overline{CH}=\overline{CD}$ 이므로 점 D의 좌표는 (0, -6)이다.

즉,  $a=6$

한편, 점 A(8, 2)가 포물선  $(y+6)^2=bx$  위의 점이므로  $64=8b$ 에서  $b=8$

따라서  $a+b=6+8=14$

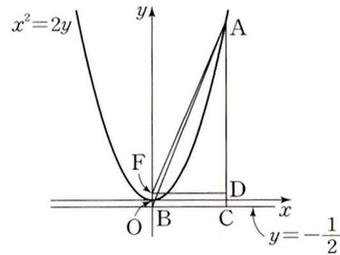
Level

3 실력 완성

본문 14쪽

1 ⑤      2 146      3 72

1



포물선  $x^2=2y$ 의 초점은  $F(0, \frac{1}{2})$ , 준선의 방정식은

$y=-\frac{1}{2}$ 이다.

점 A를 지나고  $y$ 축에 평행한 직선이 준선과 만나는 점을 C, 점 F를 지나고  $x$ 축에 평행한 직선이 직선 AC와 만나는 점을 D라 하면 삼각형 AFD에서 포물선의 정의에 의하여

$\overline{AF}=\overline{AC}=13$ 이므로 점 A의  $y$ 좌표는  $13-\frac{1}{2}=\frac{25}{2}$

점 A의  $x$ 좌표를  $x_1$ 이라 하면

$x_1^2=2 \times \frac{25}{2}=25$ 이고  $x_1 > 0$ 이므로  $x_1=5$

$\overline{AC}=13$ 이므로

$\overline{AB}=\sqrt{\overline{BC}^2+\overline{AC}^2}=\sqrt{5^2+13^2}=\sqrt{194}$

그러므로 중심이 A이고 초점 F를 지나는 원의 반지름의 길이  $r$ 이라 할 때,

선분 PB의 길이의 최댓값은

$$\overline{AB}+r=\overline{AB}+\overline{AF}=\sqrt{194}+13$$

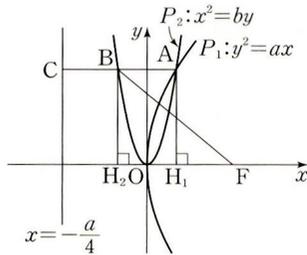
선분 PB의 길이의 최솟값은

$$\overline{AB}-r=\overline{AB}-\overline{AF}=\sqrt{194}-13$$

따라서  $\sqrt{194}-13 \leq \overline{PB} \leq \sqrt{194}+13$ 에서  
 $\sqrt{13^2}-13 < \sqrt{194}-13 < \sqrt{14^2}-13$   
 $\sqrt{13^2}+13 < \sqrt{194}+13 < \sqrt{14^2}+13$   
 이므로  $\overline{PB}$ 의 값이 자연수일 때  $1 \leq \overline{PB} \leq 26$   
 이때 선분  $\overline{PB}$ 의 길이가 자연수  $k$  ( $1 \leq k \leq 26$ )인 점  $P$ 는  
 각각 2개씩 존재하므로 구하는 점  $P$ 의 개수는  
 $26 \times 2 = 52$

☞ ⑤

2



포물선  $P_1: y^2 = ax$ 의 초점  $F$ 의 좌표는  $(\frac{a}{4}, 0)$ 이고 준선  
 의 방정식은  $x = -\frac{a}{4}$ 이다.

점  $A$ 의 좌표를  $(x_1, y_1)$ 이라 하면 포물선  $P_2$ 는  $y$ 축에 대하여  
 대칭이므로  $\overline{AB} = 2x_1$ 이고,  $\overline{AB} = \overline{BC}$ 이므로  $\overline{AC} = 4x_1$   
 직선  $x = -\frac{a}{4}$ 는 포물선  $P_1$ 의 준선이므로 포물선의 정의에

의하여  $\overline{AF} = \overline{AC} = 4x_1$ 이고,  $\frac{a}{4} = \overline{BC} + \frac{\overline{AB}}{2} = 3x_1$

두 점  $A, B$ 에서  $x$ 축에 내린 수선의 발을 각각  $H_1, H_2$ 라 하면  
 $\overline{FH_2} = \frac{a}{4} + \frac{\overline{AB}}{2} = 4x_1$

$\overline{FH_1} = 2x_1$ 이므로  $\overline{AH_1} = 2\sqrt{3}x_1$

즉, 점  $A$ 의 좌표는  $(x_1, 2\sqrt{3}x_1)$  ..... ㉠

삼각형  $BH_2F$ 에서  $\overline{BH_2} = 2\sqrt{3}x_1$ ,  $\overline{FH_2} = 4x_1$ 이므로

$\overline{BF} = 2\sqrt{7}x_1 = 4\sqrt{7}$ 에서  $x_1 = 2$

㉠에서 점  $A$ 의 좌표가  $(2, 4\sqrt{3})$ 이고, 점  $A$ 는 두 포물선

$P_1: y^2 = ax$ ,  $P_2: x^2 = by$ 의 교점이므로

$(4\sqrt{3})^2 = 2a$ 에서  $a = 24$

$2^2 = 4\sqrt{3}b$ 에서  $b = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

따라서  $6(a+b^2) = 6 \times (24 + \frac{1}{3}) = 146$

☞ 146

다른 풀이

선분  $\overline{AB}$ 의 중점을  $M$ 이라 하면  $\overline{AB} = \overline{BC}$ 이므로

$\overline{CM} = \overline{BC} + \overline{BM} = \overline{AB} + \overline{AM} = 3\overline{AM}$

즉,  $\overline{AM} = \frac{1}{3}\overline{CM} = \frac{1}{3} \times \frac{a}{4} = \frac{a}{12}$ 이므로 세 점  $A, B, F$ 의

좌표는 각각  $(\frac{a}{12}, \frac{\sqrt{3}}{6}a)$ ,  $(-\frac{a}{12}, \frac{\sqrt{3}}{6}a)$ ,  $(\frac{a}{4}, 0)$ 이다.

이때  $\overline{BF} = \sqrt{(-\frac{a}{12} - \frac{a}{4})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{6}a)^2} = \frac{\sqrt{7}}{6}a = 4\sqrt{7}$ 에서

$a = 24$

점  $A(2, 4\sqrt{3})$ 은 포물선  $x^2 = by$  위의 점이므로  $b = \frac{\sqrt{3}}{3}$

따라서  $6(a+b^2) = 6 \times (24 + \frac{1}{3}) = 146$

3 점  $A$ 의 좌표를  $(p, q)$  ( $p > 0, q > 0$ )이라 하고, 포물선  $P_1$   
 의 방정식을

$(y-q)^2 = t(x-p)$  ( $t < 0$ )

이라 하면 포물선  $P_1$ 이 원점을 지나므로

$q^2 = -tp$  ..... ㉠

포물선  $P_2$ 의 방정식을  $y^2 = kx$  ( $k > 0$ )이라 하면 포물선  
 $P_2$ 가 점  $A(p, q)$ 를 지나므로

$q^2 = kp$  ..... ㉡

㉠, ㉡을 연립하면  $-tp = kp$ 에서  $p \neq 0$ 이므로  $t = -k$

즉, 포물선  $P_1$ 의 방정식은  $(y-q)^2 = -k(x-p)$ 이고, 포  
 물선  $P_1$ 은 포물선  $P_2$ 를  $y$ 축에 대하여 대칭이동한 후  $x$ 축의  
 방향으로  $p$ 만큼,  $y$ 축의 방향으로  $q$ 만큼 평행이동한 것이므  
 로 사각형  $AF_1OF_2$ 는 직사각형이다. 점  $F_2(p, 0)$ 이 포물선  
 $y^2 = kx$ 의 초점이고 꼭짓점이 원점이므로  $k = 4p$ 이다.

이때  $k = 4p$ 를 ㉡에 대입하면

$q^2 = 4p^2$ ,  $q = 2p$

직선  $OA$ 의 방정식은  $y = 2x$ 이다.

한편, 기울기가 2인 포물선  $P_2: y^2 = 4px$ 의 접선의 방정식은

$y = 2x + \frac{p}{2}$ , 즉  $2x - y + \frac{p}{2} = 0$

직선  $2x - y + \frac{p}{2} = 0$  위의 점  $(0, \frac{p}{2})$ 와 직선  $2x - y = 0$  사  
 이의 거리는

$$\frac{|\frac{p}{2}|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{p}{2\sqrt{5}}$$

이므로 삼각형  $ACO$ 의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2} \times \overline{AO} \times \frac{p}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{2} \times \sqrt{5}p \times \frac{p}{2\sqrt{5}} = \frac{p^2}{4}$$

두 점 A, O가 각각 포물선  $P_1, P_2$ 의 꼭짓점이므로 삼각형 AOB의 넓이의 최댓값도  $\frac{p^2}{4}$ 이다.

따라서 사각형 ACOB의 넓이의 최댓값은  $\frac{p^2}{4} \times 2 = \frac{p^2}{2}$ 이므로

$$\text{조건 (다)에서 } \frac{p^2}{2} = 18, p^2 = 36$$

$p > 0$ 이므로  $p = 6$

이때 사각형  $AF_1OF_2$ 는 직사각형이므로

$$\overline{AF_2} \times \overline{OF_2} = 2p \times p = 12 \times 6 = 72$$

답 72

**참고**

$k = 4p = 2q$ 이므로 포물선  $P_1$ 의 방정식

$$(y - q)^2 = -k(x - p)$$

$$(y - 2p)^2 = -4p(x - p)$$

이때 기울기가 2인 포물선  $P_1$ 의 접선의 방정식을

$$y = 2x + s \quad (s \text{는 실수}) \text{로 놓고, } x = \frac{y - s}{2} \text{를 포물선 } P_1 \text{의}$$

방정식  $(y - 2p)^2 = -4p(x - p)$ 에 대입하면

$$y^2 - 2py - 2ps = 0$$

$y$ 에 대한 이차방정식  $y^2 - 2py - 2ps = 0$ 의 판별식을  $D$ 라 하면

$$\frac{D}{4} = p^2 + 2ps = p(p + 2s) = 0$$

$$p \neq 0 \text{이므로 } s = -\frac{p}{2}$$

따라서 기울기가 2인 포물선  $P_1$ 의 접선의 방정식은

$$y = 2x - \frac{p}{2}, \text{ 즉 } 2x - y - \frac{p}{2} = 0$$

직선  $2x - y - \frac{p}{2} = 0$  위의 점  $(0, -\frac{p}{2})$ 와 직선  $2x - y = 0$

사이의 거리는

$$\frac{\left| \frac{p}{2} \right|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{p}{2\sqrt{5}}$$

이므로 삼각형 AOB의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2} \times \overline{AO} \times \frac{p}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{2} \times \sqrt{5}p \times \frac{p}{2\sqrt{5}} = \frac{p^2}{4}$$

## 02 타원

**유제**

본문 17~21쪽

1	④	2	⑤	3	③	4	24	5	9
6	④								

- 1 두 초점이  $F(2, 0), F'(-2, 0)$ 이고 점  $(3, 0)$ 을 지나는 타원의 방정식을  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ )이라 하면 이 타원이 점  $(3, 0)$ 을 지나므로

$$\frac{9}{a^2} = 1, a^2 = 9$$

$a > 0$ 이므로  $a = 3$

삼각형  $PF'F$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{FF'}^2 = \overline{PF}^2 + \overline{PF'}^2 - 2 \times \overline{PF} \times \overline{PF'} \times \cos(\angle FPF')$$

$$16 = \overline{PF}^2 + \overline{PF'}^2 - 2 \times \overline{PF} \times \overline{PF'} \times \frac{1}{4}$$

$$16 = (\overline{PF} + \overline{PF'})^2 - \frac{5}{2} \times \overline{PF} \times \overline{PF'}$$

이때 타원의 장축의 길이는  $2a = 2 \times 3 = 6$ 이므로 타원의 정의에 의하여  $\overline{PF} + \overline{PF'} = 6$

$$\text{따라서 } 36 - \frac{5}{2} \times \overline{PF} \times \overline{PF'} = 16 \text{이므로}$$

$$\overline{PF} \times \overline{PF'} = 8$$

답 ④

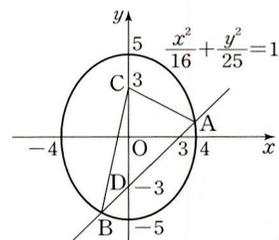
- 2 타원  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ 의 두 초점의 좌표를

$(0, c), (0, -c)$  ( $c > 0$ )이라 하면  $c^2 = 25 - 16 = 9$ 이므로 두 초점의 좌표는  $(0, 3), (0, -3)$ 이다.

직선  $x - y - 3 = 0$ 은  $x$ 절편이 3,  $y$ 절편이  $-3$ 이므로 점  $(0, -3)$ 을  $D$ 라 하면 직선  $x - y - 3 = 0$ 은 점  $D$ 를 지나고,

삼각형  $ABC$ 의 둘레의 길이는

$$\begin{aligned} \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} &= \overline{AD} + \overline{BD} + \overline{BC} + \overline{AC} \\ &= \overline{AD} + \overline{AC} + \overline{BD} + \overline{BC} \end{aligned}$$



이때 타원  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ 의 장축의 길이는  $2 \times 5 = 10$ 이므로 타원의 정의에 의하여  $\overline{AD} + \overline{AC} = 10, \overline{BC} + \overline{BD} = 10$  따라서 삼각형 ABC의 둘레의 길이는  $10 + 10 = 20$

답 ⑤

3 타원  $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$ 의 두 초점을

$$F(c, 0), F'(-c, 0) \quad (c > 0)$$

이라 하면  $c^2 = 18 - 9 = 9$ 이므로 두 초점은

$$F(3, 0), F'(-3, 0)$$

타원  $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$ 을  $x$ 축의 방향으로  $m$ 만큼,  $y$ 축의 방향

으로  $n$ 만큼 평행이동한 타원의 두 초점의 좌표가

$$(3+m, n), (-3+m, n)$$

$$3+m = -2, n = 4 \quad \text{또는} \quad -3+m = -2, n = 4$$

$$\text{즉, } m = -5, n = 4 \quad \text{또는} \quad m = 1, n = 4$$

따라서  $m > 0$ 이므로  $m+n = 1+4 = 5$

답 ③

4 조건 (가)와 조건 (나)에서 타원의 중심의 좌표가  $(0, -5)$ 이므로 이 타원은 중심이 원점인 타원을  $y$ 축의 방향으로  $-5$ 만큼 평행이동한 것이다.

이때 직선  $FF'$ 이  $x$ 축에 평행하고 장축의 길이가 26이므로 타원의 방정식을

$$\frac{x^2}{13^2} + \frac{(y+5)^2}{a} = 1 \quad (0 < a < 13^2)$$

으로 놓을 수 있다.

$$\text{타원 } \frac{x^2}{169} + \frac{(y+5)^2}{a} = 1 \text{이 원점을 지나므로 } a = 25 \text{이고,}$$

$$169 - 25 = 144 \text{이므로 타원 } \frac{x^2}{169} + \frac{(y+5)^2}{25} = 1 \text{의 두 초}$$

점의 좌표는  $(12, -5), (-12, -5)$ 이다.

따라서  $\overline{FF'} = 24$

답 24

5 기울기가  $\frac{1}{3}$ 인 타원  $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} = 1$ 의 접선의 방정식은

$$y = \frac{1}{3}x \pm \sqrt{18 \times \frac{1}{9} + 8}, y = \frac{1}{3}x \pm \sqrt{10}$$

$$x - 3y \pm 3\sqrt{10} = 0$$

이 직선이 원  $x^2 + y^2 = r^2$ 에 접하므로 원  $x^2 + y^2 = r^2$ 의 중심  $(0, 0)$ 과 직선  $x - 3y \pm 3\sqrt{10} = 0$  사이의 거리가 반지름의 길이  $|r|$ 과 같다.

$$\frac{|\pm 3\sqrt{10}|}{\sqrt{1+9}} = |r| \text{에서 } |r| = 3 \text{이므로 } r^2 = 9$$

답 9

6 점점의 좌표를  $(x_1, y_1)$ 이라 하면 접선의 방정식은

$$\frac{x_1 x}{2} + y_1 y = 1$$

이 접선이 점  $A(0, 3)$ 을 지나므로  $y_1 = \frac{1}{3}$

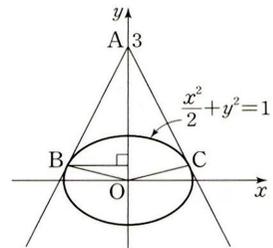
또 점  $(x_1, y_1)$ 은 타원  $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$  위의 점이므로

$$\frac{x_1^2}{2} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 \text{에서}$$

$$x_1 = -\frac{4}{3} \quad \text{또는} \quad x_1 = \frac{4}{3}$$

$$\text{즉, } B\left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right), C\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right) \text{ 또는}$$

$$B\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right), C\left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$$



이때 점 B와  $y$ 축 사이의 거리가  $\frac{4}{3}$ 이므로 삼각형 ABO의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AO} \times \frac{4}{3} = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{4}{3} = 2$$

따라서 두 삼각형 ABO, AOC의 넓이가 같으므로 사각형 ABOC의 넓이는 4이다.

답 ④

**다른 풀이**

점점의 좌표를  $(x_1, y_1)$ 이라 하면 접선의 방정식은

$$\frac{x_1 x}{2} + y_1 y = 1$$

이 접선이 점  $A(0, 3)$ 을 지나므로  $y_1 = \frac{1}{3}$

또 점  $(x_1, y_1)$ 은 타원  $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$  위의 점이므로

$$\frac{x_1^2}{2} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 \text{에서}$$

$$x_1 = -\frac{4}{3} \text{ 또는 } x_1 = \frac{4}{3}$$

즉, 두 접점의 좌표는  $(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$ 이다.

이때  $B(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}), C(\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$ 이라 하면 두 점 B, C에서의

접선의 방정식은 각각

$$2x - y + 3 = 0, 2x + y - 3 = 0$$

이때 원점과 직선  $2x - y + 3 = 0$  사이의 거리는

$$\frac{3}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

이고,  $\overline{AB} = \sqrt{\left[0 - \left(-\frac{4}{3}\right)\right]^2 + \left(3 - \frac{1}{3}\right)^2} = \frac{4\sqrt{5}}{3}$ 이므로 삼

각형 ABO의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{5}}{5} \times \frac{4\sqrt{5}}{3} = 2$$

따라서 두 삼각형 ABO, AOC의 넓이가 같으므로 사각형 ABOC의 넓이는 4이다.

2 장축의 길이가  $2 \times 8 = 16$ 이므로 타원의 정의에 의하여

$$\overline{PF'} + \overline{PF} = 16 \quad \text{..... ㉠}$$

점 F의 좌표를  $(c, 0)$  ( $c > 0$ )이라 하면

$c^2 = 64 - 24 = 40$ 이므로 점 F의 좌표는  $(2\sqrt{10}, 0)$ 이고,

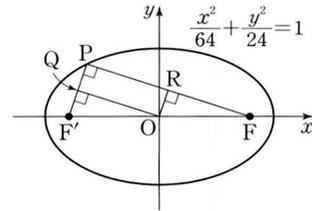
$$\overline{FO} = 2\sqrt{10}$$

한편, 두 삼각형 FOR, FF'P에서

$$\angle FRO = \angle FPF' = \frac{\pi}{2}, \angle OFR \text{이 공통이므로 두 삼각형}$$

은 서로 닮음이고,  $\overline{OF'} = \overline{OF}$ 이므로 닮음비는 1 : 2이다.

$$\text{즉, } \overline{PF'} = 2\overline{OR}, \overline{PF} = 2\overline{OQ}$$



㉠에서

$$\overline{PF'} + \overline{PF} = 2\overline{OR} + 2\overline{OQ} = 16$$

$$\text{이므로 } \overline{OR} + \overline{OQ} = 8$$

삼각형 ORF에서  $\angle ORF = \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\overline{OR}^2 + \overline{RF}^2 = \overline{FO}^2 \text{에서}$$

$$\overline{OR}^2 + \overline{RF}^2 = 40$$

$$(\overline{OR} + \overline{RF})^2 - 2 \times \overline{OR} \times \overline{RF} = 40$$

이때  $\overline{PR} = \overline{RF} = \overline{OQ}$ 이므로

$$8^2 - 2 \times \overline{OR} \times \overline{PR} = 40, \overline{OR} \times \overline{PR} = 12$$

따라서 사각형 PQOR은  $\angle RPQ = \angle ORP = \frac{\pi}{2}$ 인 직사각

형이므로 이 사각형의 넓이는

$$\overline{OR} \times \overline{PR} = 12$$

답 ①

3 장축의 길이가  $2 \times 6 = 12$ 이므로 타원의 정의에 의하여

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = 12 \text{이고, 조건에서 } \overline{PF} = 2\overline{PF'} \text{이므로}$$

$$\overline{PF} = 8, \overline{PF'} = 4$$

한편, 삼각형 PFF'에서  $\angle FPF' = \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\overline{FF'} = \sqrt{\overline{PF}^2 + \overline{PF'}^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

이때 점 F의 좌표를  $(0, c)$  ( $c > 0$ )이라 하면  $c = 2\sqrt{5}$ 이므로

$$36 - a^2 = 20 \text{에서}$$

$$a^2 = 16$$

답 ③

Level

1 기초 연습

본문 22~23쪽

- |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1 ④ | 2 ① | 3 ③ | 4 ④ | 5 ③ |
| 6 ② | 7 ① | 8 ① |     |     |

1 두 초점이 F, F'인 타원  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ )의 장축의 길이가 6이므로  $2a = 6$ 에서  $a = 3$

타원의 방정식이  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 이고, 점  $(1, \frac{4}{3})$ 가 타원 위의

의 점이므로  $\frac{1}{9} + \frac{16}{9b^2} = 1, \frac{16}{9b^2} = \frac{8}{9}, b^2 = 2$

즉, 타원의 방정식은  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{2} = 1$ 이다.

이때 두 초점의 좌표를  $(c, 0), (-c, 0)$  ( $c > 0$ )이라 하면

$$c = \sqrt{9 - 2} = \sqrt{7}$$

따라서  $F(\sqrt{7}, 0), F'(-\sqrt{7}, 0)$  또는

$F(-\sqrt{7}, 0), F'(\sqrt{7}, 0)$ 이므로

$$\overline{FF'} = 2\sqrt{7}$$

답 ④

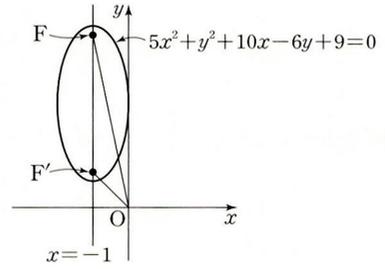
- 4 장축의 길이가  $2 \times 4 = 8$ 이므로 타원의 정의에 의하여  $\overline{PF'} + \overline{PF} = 8$ 이고, 조건에서  $\overline{PF} = 2$ 이므로  $\overline{PF'} = 6$   
 점 F의 좌표를  $(c, 0)$  ( $c > 0$ )이라 하면  $c^2 = 16 - 7 = 9$ 이므로 점 F의 좌표는  $(3, 0)$ 이고,  $\overline{F'F} = 6$   
 즉, 삼각형  $PF'F$ 는  $\overline{PF'} = \overline{F'F}$ 인 이등변삼각형이므로 점 F'에서 선분 PF에 내린 수선의 발을 H라 하면  $\overline{PH} = 1$ 이고  
 $\overline{F'H} = \sqrt{\overline{PF'}^2 - \overline{PH}^2} = \sqrt{36 - 1} = \sqrt{35}$   
 따라서 삼각형  $PF'F$ 의 넓이는  
 $\frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{35} = \sqrt{35}$

답 ④

- 5 타원  $\frac{x^2}{10} + y^2 = 1$ 의 두 초점의 좌표를  $(c, 0)$ ,  $(-c, 0)$  ( $c > 0$ )이라 하면  $c^2 = 10 - 1 = 9$ 이므로 두 초점의 좌표는  $(3, 0)$ ,  $(-3, 0)$ 이다.  
 타원  $\frac{(x+3)^2}{10} + (y+3)^2 = 1$ 은 타원  $\frac{x^2}{10} + y^2 = 1$ 을  $x$ 축의 방향으로  $-3$ 만큼,  $y$ 축의 방향으로  $-3$ 만큼 평행이동한 것이므로 타원  $\frac{(x+3)^2}{10} + (y+3)^2 = 1$ 의 두 초점의 좌표는  $(0, -3)$ ,  $(-6, -3)$ 이다.  
 따라서 삼각형  $OF'F$ 의 둘레의 길이는  
 $\sqrt{(-6)^2 + (-3)^2} + 6 + 3 = 9 + 3\sqrt{5}$

답 ③

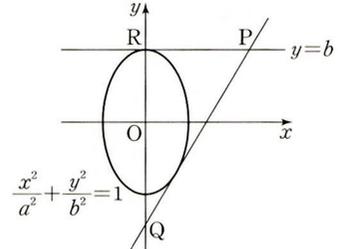
- 6  $5x^2 + y^2 + 10x - 6y + 9 = 0$ 에서  
 $5(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 6y + 9) = 5$   
 $(x+1)^2 + \frac{(y-3)^2}{5} = 1$   
 이므로 이 타원은 타원  $x^2 + \frac{y^2}{5} = 1$ 을  $x$ 축의 방향으로  $-1$ 만큼,  $y$ 축의 방향으로  $3$ 만큼 평행이동한 것이다.  
 타원  $x^2 + \frac{y^2}{5} = 1$ 의 두 초점의 좌표를  $(0, c)$ ,  $(0, -c)$  ( $c > 0$ )이라 하면  $c^2 = 5 - 1 = 4$ 이므로 두 초점의 좌표는  $(0, 2)$ ,  $(0, -2)$ 이다.  
 그러므로 타원  $5x^2 + y^2 + 10x - 6y + 9 = 0$ 의 두 초점의 좌표는  $(-1, 5)$ ,  $(-1, 1)$ 이다.



따라서  $F(-1, 5)$ ,  $F'(-1, 1)$ 이라 하면 삼각형  $OFF'$ 에서  $\overline{FF'} = 5 - 1 = 4$ 이고, 점 O와 직선  $x = -1$  사이의 거리는 1이므로 삼각형  $OFF'$ 의 넓이는  
 $\frac{1}{2} \times 4 \times 1 = 2$

답 ②

7



타원  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  위의 점  $(1, -\sqrt{3})$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x}{a^2} - \frac{\sqrt{3}y}{b^2} = 1, \text{ 즉 } y = \frac{\sqrt{3}b^2}{3a^2}x - \frac{\sqrt{3}b^2}{3} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편,  $\sin(\angle OQP) = \frac{1}{2}$ 이므로  $\angle OQP = \frac{\pi}{6}$

점  $(0, b)$ 를 R이라 하면  $\angle QPR = \frac{\pi}{3}$ 이므로 직선 PQ와 직선  $y = b$ 가 이루는 예각의 크기가  $\frac{\pi}{3}$ 이고 직선 PQ의 기울기는  $\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ 이다.

$$\textcircled{1} \text{에서 } \frac{\sqrt{3}b^2}{3a^2} = \sqrt{3} \text{이므로 } b^2 = 3a^2$$

점  $(1, -\sqrt{3})$ 이 타원  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  위의 점이므로

$$\frac{1}{a^2} + \frac{3}{b^2} = 1, \frac{1}{a^2} + \frac{3}{3a^2} = 1$$

$$a^2 = 2, b^2 = 6$$

따라서  $a^2 + b^2 = 2 + 6 = 8$

답 ①

8 타원  $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$  위의 점  $(4, -1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{4x}{20} - \frac{y}{5} = 1, \text{ 즉 } y = x - 5 \quad \cdots \textcircled{1}$$

기울기가 1이고 포물선  $y^2 = ax$ 에 접하는 접선의 방정식은

$$y = x + \frac{a}{4} \quad \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 이 일치하므로  $\frac{a}{4} = -5$

따라서  $a = -20$

답 ①

2 장축의 길이가  $2 \times 7 = 14$ 이므로 타원의 정의에 의하여  $\overline{PF} + \overline{PF'} = 14$

$$\overline{PF} = 12 \text{ 이므로 } \overline{PF'} = 2$$

이때  $\overline{QF'} = 1$ 이므로  $\overline{PQ} = 1$

$\angle PFQ = \angle QFF'$ 이므로 각의 이등분선의 성질에 의하여

$$\overline{PF} : \overline{FF'} = \overline{PQ} : \overline{QF'}$$

$$12 : \overline{FF'} = 1 : 1 \text{ 에서 } \overline{FF'} = 12$$

따라서 점 F의 좌표는  $(6, 0)$ 이므로

$$49 - a = 36, a = 13$$

답 ④

3 타원  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ 의 두 초점

$F(c, 0), F'(-c, 0)$  ( $c > 0$ )이라 하면  $c^2 = 9 - 5 = 4$ 이므로 두 초점은  $F(2, 0), F'(-2, 0)$ 이고  $\overline{FF'} = 4$

타원의 정의에 의하여  $\overline{PF} + \overline{PF'} = 6$ 이므로

$$\overline{PF} = 6 - \overline{PF'}$$

$$\overline{AP} - \overline{PF} = \overline{AP} - (6 - \overline{PF'})$$

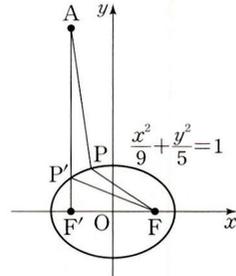
$$= \overline{AP} + \overline{PF'} - 6$$

이때  $\overline{AP} + \overline{PF'} \geq \overline{AF'}$ 이므로

$$\overline{AP} - \overline{PF} = \overline{AP} + \overline{PF'} - 6$$

$$\geq \overline{AF'} - 6 = 9 - 6 = 3$$

에서  $m = 3$



한편, 점 P'은 직선  $x = -2$  위에 있으므로

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1 \text{ 에 } x = -2 \text{ 를 대입하면 } y^2 = \frac{25}{9}$$

점 P'은 제2사분면 위의 점이므로 점 P'의 좌표는  $(-2, \frac{5}{3})$

따라서 삼각형 P'F'F의 넓이 S는

$$S = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{5}{3} = \frac{10}{3}$$

이므로

$$m \times S = 3 \times \frac{10}{3} = 10$$

답 10

Level

2 기본 연습

본문 24~25쪽

- 1 ①      2 ④      3 10      4 45      5 ①  
6 ③

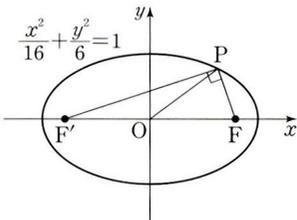
1 타원  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{6} = 1$ 의 두 초점 F, F'의 좌표를 각각  $(c, 0),$

$(-c, 0)$  ( $c > 0$ )이라 하면  $c^2 = 16 - 6 = 10$ 이므로

$F(\sqrt{10}, 0), F'(-\sqrt{10}, 0)$ 이고  $\overline{FF'} = 2\sqrt{10}$

이때  $\overline{OF'} = \overline{OF} = \overline{OP} = \sqrt{10}$ 이므로 세 점 P, F', F는 중심

이 O인 한 원 위에 있고  $\angle F'PF = \frac{\pi}{2}$ 이다.



즉, 직각삼각형 FPF'에서  $\overline{PF'}^2 + \overline{PF}^2 = (2\sqrt{10})^2$

이때 타원의 정의에 의하여  $\overline{PF'} + \overline{PF} = 8$ 이므로

$\overline{PF'} = 8 - \overline{PF}$ 를  $\overline{PF'}^2 + \overline{PF}^2 = 40$ 에 대입하면

$$(8 - \overline{PF})^2 + \overline{PF}^2 = 40, \overline{PF}^2 - 8\overline{PF} + 12 = 0$$

$$(\overline{PF} - 2)(\overline{PF} - 6) = 0$$

$$\overline{PF'} > \overline{PF} \text{ 이므로 } \overline{PF'} = 6, \overline{PF} = 2$$

따라서 삼각형 PF'F의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{PF} \times \overline{PF'} = \frac{1}{2} \times 2 \times 6 = 6$$

이고 삼각형 OPF'의 넓이는  $\frac{1}{2} \times 6 = 3$

답 ①

4 삼각형 PHF에서  $\cos(\angle FPF') = \frac{2}{3}$  이므로  $\frac{\overline{PH}}{\overline{PF}} = \frac{2}{3}$

$$\text{이때 } \overline{PH} = \frac{8}{3} \text{ 이므로 } \overline{PF} = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{2}{3}} = 4$$

삼각형 PF'F에서 코사인법칙에 의하여  $\overline{F'F}^2 = \overline{PF'}^2 + \overline{PF}^2 - 2 \times \overline{PF'} \times \overline{PF} \times \cos(\angle FPF')$

$$(2\sqrt{5})^2 = \overline{PF'}^2 + 4^2 - 2 \times \overline{PF'} \times 4 \times \frac{2}{3}$$

$$3\overline{PF'}^2 - 16\overline{PF'} - 12 = 0$$

$$(\overline{PF'} - 6)(3\overline{PF'} + 2) = 0$$

$$\overline{PF'} > 0 \text{ 이므로 } \overline{PF'} = 6$$

타원의 정의에 의하여  $\overline{PF} + \overline{PF'} = 2a$  이므로

$$2a = 4 + 6 = 10$$

$$a = 5 \text{ 이므로 } a^2 = 25$$

초점 F의 x좌표를 c라 하면  $c^2 = a^2 - b^2$ 에서

$$\left(\frac{2\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 25 - b^2, \quad b^2 = 20$$

$$\text{따라서 } a^2 + b^2 = 25 + 20 = 45$$

답 45

5 두 점 A(3, 2), B(5, -2)를 지나는 직선의 방정식은  $y = -2x + 8$ 이고,

$$\overline{AB} = \sqrt{(5-3)^2 + (-2-2)^2} = 2\sqrt{5}$$

한편, 타원  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 에 접하고 기울기가 -2인 접선의 방정식은

$$y = -2x \pm \sqrt{4 \times 4 + 9}, \quad \text{즉 } y = -2x \pm 5$$

이때 삼각형 APB의 넓이가 최소가 되려면 점 P는 직선  $y = -2x + 5$  위에 있어야 하고, 최대가 되려면 점 P는 직선  $y = -2x - 5$  위에 있어야 한다.

두 직선  $y = -2x + 8, y = -2x + 5$  사이의 거리는 점 (0, 8)

과 직선  $2x + y - 5 = 0$  사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|8-5|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

즉, 삼각형 APB의 넓이의 최솟값은

$$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times \frac{3\sqrt{5}}{5} = 3$$

두 직선  $y = -2x + 8, y = -2x - 5$  사이의 거리는 점 (0, 8)

과 직선  $2x + y + 5 = 0$  사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|8+5|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{13\sqrt{5}}{5}$$

즉, 삼각형 APB의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times \frac{13\sqrt{5}}{5} = 13$$

따라서

$$n=3 \text{ 일 때, } f(3)=1$$

$$n=13 \text{ 일 때, } f(13)=1$$

$$4 \leq n \leq 12 \text{ 일 때, } f(n)=2$$

$$n \geq 14 \text{ 일 때, } f(n)=0$$

$$\text{이므로 } \sum_{n=3}^{15} f(n) = 1 + 2 \times 9 + 1 = 20$$

답 ①

6 타원  $\frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{8} = 1$ 의 두 초점 F, F'의 좌표를 각각

$(c, 0), (-c, 0)$  ( $c > 0$ )이라 하면  $c^2 = 24 - 8 = 16$ 이므로  $F(4, 0), F'(-4, 0)$

타원  $\frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{8} = 1$  위의 점  $P(a, b)$  ( $a < 0, b > 0$ )에서의 접선의 방정식은

$$\frac{ax}{24} + \frac{by}{8} = 1, \quad \text{즉 } y = -\frac{a}{3b}x + \frac{8}{b}$$

이므로 이 접선에 수직이고 점 P를 지나는 직선의 방정식은

$$y = \frac{3b}{a}(x-a) + b, \quad \text{즉 } y = \frac{3b}{a}x - 2b$$

이 직선이 x축과 만나는 점의 x좌표가  $\frac{2a}{3}$  이고

$$-2\sqrt{6} < a < 0 \text{ 에서}$$

$$-4 < -\frac{4\sqrt{6}}{3} < \frac{2a}{3} < 0$$

이므로 점 Q는 선분 FF' 위에 있다.

$$\text{이때 } \overline{F'Q} = \frac{2a}{3} + 4, \quad \overline{FQ} = 4 - \frac{2a}{3} \text{ 이고}$$

$$\overline{F'Q} : \overline{FQ} = 1 : (2 + \sqrt{3}) \text{ 이므로}$$

$$\left(\frac{2a}{3} + 4\right) : \left(4 - \frac{2a}{3}\right) = 1 : (2 + \sqrt{3})$$

$$4 - \frac{2a}{3} = (2 + \sqrt{3}) \times \left(\frac{2a}{3} + 4\right)$$

$$(3 + \sqrt{3})a = -6 - 6\sqrt{3}$$

$$a = -2\sqrt{3}, \quad a^2 = 12$$

점  $P(-2\sqrt{3}, b)$ 가 타원  $\frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{8} = 1$  위의 점이므로

$$\frac{12}{24} + \frac{b^2}{8} = 1, \quad \frac{b^2}{8} = \frac{1}{2}, \quad b^2 = 4$$

$$\text{따라서 } a^2 + b^2 = 12 + 4 = 16$$

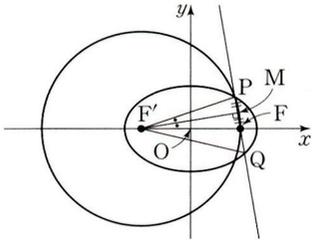
답 ③

Level 3 실력 완성

본문 26쪽

- 1 73      2 ①      3 ④

1 타원의 두 초점이  $F'(-6, 0)$ ,  $F(6, 0)$ 이므로  $\overline{F'F}=12$ 이고, 중심이  $F'$ 이고 반지름의 길이가  $\overline{F'F}$ 인 원 위에 점 P가 있으므로  $\overline{F'F}=\overline{PF'}=12$ 이다.



즉, 삼각형  $PF'F$ 는 이등변삼각형이므로  $\angle PF'F$ 의 이등분선은 선분  $PF$ 를 수직이등분한다.

선분  $PF$ 의 중점을 M이라 하면

$$\cos(\angle PFF') = \frac{\overline{FM}}{12} = \frac{1}{6} \text{ 이므로 } \overline{FM}=2, \overline{PF}=4$$

$\overline{PF'}=12$ ,  $\overline{PF}=4$ 이므로 타원의 장축의 길이는 16이다.

한편,  $\overline{QF}=a$ 라 하면  $\overline{QF'}=16-a$

삼각형  $QFF'$ 에서

$$\cos(\angle QFF') = \cos(\pi - \angle PFF') = -\frac{1}{6}$$

이므로 코사인법칙에 의하여

$$(16-a)^2 = 12^2 + a^2 - 2 \times 12 \times a \times \left(-\frac{1}{6}\right)$$

$$a = \frac{28}{9}$$

$$\text{따라서 } \overline{PQ} = 4 + \frac{28}{9} = \frac{64}{9} \text{ 이므로}$$

$$p=9, q=64 \text{에서 } p+q=9+64=73$$

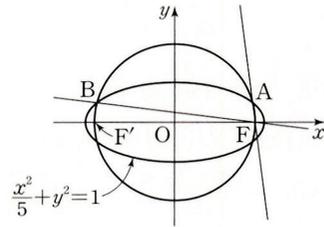
답 73

2 두 초점  $F, F'$ 의 좌표를 각각  $(c, 0), (-c, 0)$  ( $c>0$ )이라 하면  $c^2=5-1=4$ 이므로  $F(2, 0), F'(-2, 0)$

선분  $FF'$ 을 지름으로 하는 원이 타원  $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$ 과 만나는 점 중에서 제1사분면에 있는 점을 C, 제2사분면에 있는 점을 D라 하면  $\angle FCF' = \frac{\pi}{2}, \angle FDF' = \frac{\pi}{2}$ 이다.

이때 점 P의  $y$ 좌표가 0 또는 양수이고  $\cos(\angle F'PF) \leq 0$

이므로 점 P는 타원 위에 있으면서 점 C와 점 D 사이의 제1사분면 또는 제2사분면 위에 있거나 점 C 또는 점 D 또는 점  $(0, 1)$ 과 일치한다. 직선  $FP$ 의 기울기가 최소인 점 P가 A, 직선  $FP$ 의 기울기가 최대인 점 P가 B이므로 점 C가 A이고 점 D가 B이다.



선분  $FF'$ 을 지름으로 하는 원의 방정식은  $x^2 + y^2 = 4$ 이고,

$$x^2 = 4 - y^2 \text{을 } \frac{x^2}{5} + y^2 = 1 \text{에 대입하면}$$

$$\frac{4 - y^2}{5} + y^2 = 1 \text{에서 } y^2 = \frac{1}{4} \text{이고, } y > 0 \text{이므로 } y = \frac{1}{2}$$

$$x = -\frac{\sqrt{15}}{2} \text{ 또는 } x = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

$$\text{즉, } A\left(\frac{\sqrt{15}}{2}, \frac{1}{2}\right), B\left(-\frac{\sqrt{15}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{따라서 } \overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OF} = 2, \overline{AB} = 2 \times \frac{\sqrt{15}}{2} = \sqrt{15} \text{이므로}$$

삼각형  $OAB$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle AOB) = \frac{2^2 + 2^2 - (\sqrt{15})^2}{2 \times 2 \times 2} = -\frac{7}{8}$$

답 ①

다른 풀이

두 초점  $F, F'$ 의 좌표를 각각  $(c, 0), (-c, 0)$  ( $c>0$ )이라 하면  $c^2=5-1=4$ 이므로  $F(2, 0), F'(-2, 0)$

조건을 만족시키는 점 A는  $\angle FAF' = \frac{\pi}{2}$ 인 제1사분면에

있는 점이고, 점 B는  $\angle FBF' = \frac{\pi}{2}$ 인 제2사분면에 있는 점

이다. 또한 점 A와 점 B는  $y$ 축에 대하여 대칭이다.

한편,  $\overline{F'A}^2 + \overline{FA}^2 = 4^2$ 이고, 타원의 정의에 의하여

$$\overline{F'A} + \overline{FA} = 2\sqrt{5} \text{이므로}$$

$$(\overline{F'A} + \overline{FA})^2 = \overline{F'A}^2 + \overline{FA}^2 + 2 \times \overline{F'A} \times \overline{FA} \text{에서}$$

$$20 = 16 + 2 \times \overline{F'A} \times \overline{FA}$$

$$\overline{F'A} \times \overline{FA} = 2$$

점 A의  $y$ 좌표를  $y_1$ 이라 하면 삼각형  $AF'F$ 에서

$$\frac{1}{2} \times \overline{F'A} \times \overline{FA} = \frac{1}{2} \times \overline{F'F} \times y_1$$

$$\frac{1}{2} \times 2 = \frac{1}{2} \times 4 \times y_1, y_1 = \frac{1}{2}$$

점 A는 타원  $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$  위의 점이므로

$$\frac{x^2}{5} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1, x^2 = \frac{15}{4}$$

$$x = -\frac{\sqrt{15}}{2} \text{ 또는 } x = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

$$\text{즉, } A\left(\frac{\sqrt{15}}{2}, \frac{1}{2}\right), B\left(-\frac{\sqrt{15}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

따라서  $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OF} = 2$ ,  $\overline{AB} = 2 \times \frac{\sqrt{15}}{2} = \sqrt{15}$ 이므로

삼각형 OAB에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle AOB) = \frac{2^2 + 2^2 - (\sqrt{15})^2}{2 \times 2 \times 2} = -\frac{7}{8}$$

- 3 타원  $E_1: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ 의 두 초점 F, F'의 좌표를 각각  $(c, 0)$ ,  $(-c, 0)$  ( $c > 0$ )이라 하면  $c^2 = 16 - 12 = 4$ 이므로  $F(2, 0)$ ,  $F'(-2, 0)$ 이고,  $\overline{FF'} = 4$ 이다.

점 P는 타원  $E_1$  위의 점이므로 타원의 정의에 의하여

$$\overline{PF'} + \overline{PF} = 8 \text{이고, 조건 (가)에서 } \overline{PA} + \overline{PF'} = 8 \text{이므로}$$

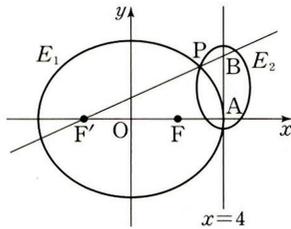
$$\overline{PF} = \overline{PA}$$

즉, 점 P의 x좌표는 3이다.

점 P는 타원  $E_1: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$  위의 점이므로

$$\frac{9}{16} + \frac{y^2}{12} = 1 \text{에서 } y^2 = \frac{21}{4}$$

$y > 0$ 에서  $y = \frac{\sqrt{21}}{2}$ 이므로 점 P의 좌표는  $\left(3, \frac{\sqrt{21}}{2}\right)$ 이다.



이때 직선 PF'의 방정식은  $y = \frac{\sqrt{21}}{10}(x+2)$ 이고, 이 식에

$x=4$ 를 대입하면  $y = \frac{3\sqrt{21}}{5}$ 이므로 점 B의 좌표는

$$\left(4, \frac{3\sqrt{21}}{5}\right) \text{이다.}$$

$$\overline{BP} = \sqrt{(4-3)^2 + \left(\frac{3\sqrt{21}}{5} - \frac{\sqrt{21}}{2}\right)^2} = \frac{11}{10}$$

$$\overline{AP} = \sqrt{(3-4)^2 + \left(\frac{\sqrt{21}}{2}\right)^2} = \frac{5}{2}$$

$$\text{이므로 } \overline{AP} + \overline{BP} = \frac{5}{2} + \frac{11}{10} = \frac{18}{5}$$

따라서 타원  $E_2$ 의 장축의 길이는  $\frac{18}{5}$ 이다.

# 03 쌍곡선

유제	본문 29~33쪽				
1 27	2 ②	3 ①	4 ⑤	5 ③	
6 23					

**1** 쌍곡선의 정의에 의하여  
 $\overline{PF} - \overline{PF'} = 6$  ..... ㉠  
 이때  $2(\overline{PF} - \overline{PF'}) = \overline{PF} + \overline{PF'}$ 이므로  
 $\overline{PF} + \overline{PF'} = 12$  ..... ㉡  
 ㉠, ㉡에서  $\overline{PF} = 9, \overline{PF'} = 3$ 이므로  
 $\overline{PF} \times \overline{PF'} = 9 \times 3 = 27$

답 27

**2** 쌍곡선의 정의에 의하여  $|\overline{PF'} - \overline{PF}| = 4$ 이고  $\overline{PF} = 3$ 이므로  $\overline{PF'} > 3$ 이다.  
 즉,  $\overline{PF'} = 7$   
 한편, 초점 F의 y좌표를 c라 하면  $c^2 = 12 + 4 = 16$ 에서  $c = 4$  또는  $c = -4$   
 즉,  $\overline{FF'} = 8$   
 따라서 삼각형 PFF'의 둘레의 길이는  
 $\overline{PF} + \overline{PF'} + \overline{FF'} = 3 + 7 + 8 = 18$

답 ②

**3** 쌍곡선  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 주축의 길이가  $2\sqrt{2}$ 이므로  
 $2a = 2\sqrt{2}$ 에서  $a = \sqrt{2}$   
 쌍곡선  $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 두 초점의 좌표를  
 $(c, 0), (-c, 0)$  ( $c > 0$ )이라 하면  
 $2c = 4\sqrt{2}$ 에서  $c = 2\sqrt{2}$   
 $2 + b^2 = c^2$ 에서  $2 + b^2 = 8, b = \sqrt{6}$   
 따라서  $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{6} = 1$ 의 두 점근선의 방정식이  $y = \sqrt{3}x,$   
 $y = -\sqrt{3}x$ 이고,  $\tan \theta_1 \times \tan \theta_2$ 의 값은 두 점근선의 기울기의 곱이므로  
 $\tan \theta_1 \times \tan \theta_2 = -3$

답 ①

**4** 두 초점의 좌표가  $(2, 1), (2, -7)$ 이므로  
 쌍곡선  $\frac{(x-a)^2}{b^2} - \frac{(y+3)^2}{4} = -1$ 의 중심의 좌표는  
 $(\frac{2+2}{2}, \frac{1-7}{2}),$  즉  $(2, -3)$   
 쌍곡선  $\frac{(x-a)^2}{b^2} - \frac{(y+3)^2}{4} = -1$ 은 쌍곡선  
 $\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{4} = -1$ 을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로 중심의 좌표는  $(a, -3)$ 이다.  
 즉,  $a = 2$   
 쌍곡선  $\frac{(x-a)^2}{b^2} - \frac{(y+3)^2}{4} = -1$ 의 두 초점의 좌표가  
 $(2, 1), (2, -7)$ 이므로 쌍곡선  $\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{4} = -1$ 의 두 초점의 좌표는  $(0, 4), (0, -4)$ 이다.  
 즉,  $b^2 + 4 = 16$ 에서  $b^2 = 12$

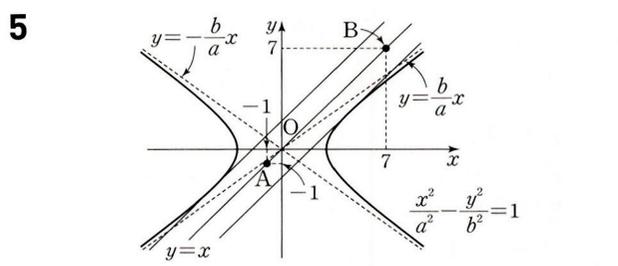
따라서 쌍곡선  $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = -1$ 의 기울기가 양수인 점근선의

방정식이  $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$ 이므로 쌍곡선  
 $\frac{(x-2)^2}{12} - \frac{(y+3)^2}{4} = -1$ 의 기울기가 양수인 점근선의 방정식은

$$y + 3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(x - 2), \text{ 즉 } y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{2\sqrt{3}}{3} - 3$$

이고, 이 직선의 x절편은  $2 + 3\sqrt{3}$ 이다.

답 ⑤



두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식이  $y = x$ 이고, 쌍곡선  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 점근선의 방정식은  $y = \frac{b}{a}x, y = -\frac{b}{a}x$ 이다.  
 $0 < b < a$ 에서  $\frac{b}{a} < 1$ 이므로 두 점 A, B를 지나는 직선은 쌍곡선  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 과 만나지 않는다.

한편,  $\overline{AB} = \sqrt{64+64} = 8\sqrt{2}$ 이고, 삼각형 PAB의 넓이의 최솟값이 8이므로 점 P와 직선 AB 사이의 거리의 최솟값이  $\sqrt{2}$ 이어야 한다.

점 P와 직선 AB 사이의 거리의 최솟값은 쌍곡선

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 에 접하고 기울기가 1인 직선과 직선  $y=x$  사이의 거리와 같다.

쌍곡선  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 에 접하고 기울기가 1인 직선의 방정식은

$$y = x \pm \sqrt{a^2 - b^2}$$

이때 직선  $y=x$ 에서 두 직선  $y = x + \sqrt{a^2 - b^2}$ ,

$y = x - \sqrt{a^2 - b^2}$ 에 이르는 거리는 서로 같다.

따라서 직선  $y=x$  위의 점  $(0, 0)$ 과 직선

$x - y + \sqrt{a^2 - b^2} = 0$  사이의 거리는  $\sqrt{2}$ 이므로

$$\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$a^2 - b^2 = 4$$

답 ③

6  $3x^2 - 2y^2 + 6 = 0$ 에서  $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} = -1$

점  $A(1, 0)$ 에서 쌍곡선  $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} = -1$ 에 그은 접선의 접

점의 좌표를  $(x_1, y_1)$ 이라 하면 접선의 방정식은

$$\frac{x_1 x}{2} - \frac{y_1 y}{3} = -1$$

점  $A(1, 0)$ 이 이 접선 위의 점이므로  $x_1 = -2$

또 점  $(x_1, y_1)$ 은 쌍곡선 위의 점이므로

$$\frac{x_1^2}{2} - \frac{y_1^2}{3} = -1 \text{에서 } 2 - \frac{y_1^2}{3} = -1$$

$$y_1 = 3 \text{ 또는 } y_1 = -3$$

즉, 접점의 좌표는  $(-2, 3)$ ,  $(-2, -3)$ 이다.

이때 점  $(-2, 3)$ 을 B, 원의 중심  $(-a, 0)$ 을 D라 하면

삼각형 ABD에서  $\angle ABD = \frac{\pi}{2}$ 이고,

$$\overline{AB} = \sqrt{(-2-1)^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\overline{BD} = \sqrt{(-2+a)^2 + 3^2}$$

$$\overline{AD} = 1+a$$

이므로

$$18 + \{(-2+a)^2 + 3^2\} = (1+a)^2 \text{에서 } a=5$$

$$r = \overline{BD} = 3\sqrt{2}$$

$$\text{따라서 } a+r^2 = 5+18 = 23$$

답 23

Level

**1 기초 연습** 본문 34~35쪽

1 ③	2 ①	3 ②	4 20	5 ⑤
6 ③	7 ③	8 ②		

1  $\overline{OF'} = \overline{OF}$ 이므로  $2\overline{OF'} = \overline{FF'}$ 이고, 직선 OQ와 직선 PF가

평행하므로  $\overline{PF} = 2\overline{OQ} = 2$ ,  $\overline{PF'} = 2\overline{QF'} = 10$

쌍곡선의 정의에 의하여 주축의 길이는  $\overline{PF'} - \overline{PF}$ 의 값과 같으므로

$$\overline{PF'} - \overline{PF} = 10 - 2 = 8$$

답 ③

2 쌍곡선  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 의 두 초점 F, F'의 좌표를 각각

$(c, 0)$ ,  $(-c, 0)$  ( $c > 0$ )이라 하면  $c^2 = 9 + 16 = 25$ 이므로  $F(5, 0)$ ,  $F'(-5, 0)$ 이고,  $\overline{FF'} = 10$ 이다.

점 P는 선분 FF'을 지름으로 하는 원 위의 점이므로

$$\angle F'PF = \frac{\pi}{2}$$

직각삼각형 PF'F에서

$$\overline{PF}^2 + \overline{PF'}^2 = \overline{FF'}^2 = 100$$

점 P는 쌍곡선  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$  위의 점이므로 쌍곡선의 정의

에 의하여  $\overline{PF} - \overline{PF'} = 6$

$$\text{양변을 제곱하면 } (\overline{PF} - \overline{PF'})^2 = 36$$

$$\overline{PF}^2 + \overline{PF'}^2 - 2 \times \overline{PF} \times \overline{PF'} = 36$$

$$100 - 2 \times \overline{PF} \times \overline{PF'} = 36$$

$$\overline{PF} \times \overline{PF'} = 32$$

따라서 삼각형 PF'F의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{PF} \times \overline{PF'} = \frac{1}{2} \times 32 = 16$$

답 ①

3 쌍곡선  $\frac{x^2}{24} - y^2 = -1$ 의 두 초점 F, F'의 좌표를 각각

$(0, c)$ ,  $(0, -c)$  ( $c > 0$ )이라 하면  $c^2 = 24 + 1 = 25$ 이므로  $F(0, 5)$ ,  $F'(0, -5)$

점 P의 좌표를  $(a, b)$  ( $a > 0, b > 0$ )이라 하면 두 직선

PF, PF'이 서로 수직이므로

$$\frac{b-5}{a} \times \frac{b+5}{a} = -1$$

즉,  $a^2 + b^2 = 25$  ..... ㉠

한편, 점 P(a, b)는 쌍곡선  $\frac{x^2}{24} - y^2 = -1$  위의 점이므로

$\frac{a^2}{24} - b^2 = -1$  ..... ㉡

㉠, ㉡에서  $\frac{a^2}{24} - (25 - a^2) = -1$

$a^2 = \frac{24 \times 24}{25}$ 에서  $a > 0$ 이므로  $a = \frac{24}{5}$ 이고,

$b^2 = \frac{49}{25}$ 에서  $b > 0$ 이므로  $b = \frac{7}{5}$

따라서 점 P의 좌표가  $(\frac{24}{5}, \frac{7}{5})$ 이므로 직선 OP의 기울기는

$$\frac{\frac{7}{5}}{\frac{24}{5}} = \frac{7}{24}$$

답 ②

**다른 풀이**

쌍곡선  $\frac{x^2}{24} - y^2 = -1$ 의 두 초점 F, F'의 좌표를 각각

$(0, c), (0, -c)$  ( $c > 0$ )이라 하면  $c^2 = 24 + 1 = 25$ 이므로  $F(0, 5), F'(0, -5)$ 이고,  $\overline{FF'} = 10$ 이다.

쌍곡선의 정의에 의하여  $\overline{PF'} - \overline{PF} = 2$ 이고, 직선 PF와 직선 PF'은 서로 수직이므로

$$\overline{PF}^2 + \overline{PF'}^2 = \overline{FF'}^2$$

$$(\overline{PF} + 2)^2 + \overline{PF}^2 = 100 \text{에서}$$

$$\overline{PF}^2 + 2\overline{PF} - 48 = 0, (\overline{PF} + 8)(\overline{PF} - 6) = 0$$

$$\overline{PF} > 0 \text{이므로 } \overline{PF} = 6$$

$$\overline{PF'} = 8$$

점 P의 좌표를  $(a, b)$ ,  $\angle PFF' = \theta$ 라 하자.

$$a = \overline{PF} \times \sin \theta = 6 \times \frac{4}{5} = \frac{24}{5}$$

$$b = 5 - \overline{PF} \times \cos \theta = 5 - 6 \times \frac{3}{5} = \frac{7}{5}$$

따라서 직선 OP의 기울기는  $\frac{\frac{7}{5}}{\frac{24}{5}} = \frac{7}{24}$

4  $c^2 = 1 + 15 = 16$ 에서  $c > 0$ 이므로  $c = 4$

즉, 쌍곡선  $x^2 - \frac{y^2}{15} = 1$ 의 두 초점 F, F'의 좌표는 각각

$(4, 0), (-4, 0)$ 이다.

이때  $\overline{FH} = 3\overline{F'H}$ 이고 점 H의 x좌표를 k라 하면

$$\overline{FH} < \overline{FF'}$$
에 의해  $k > -4$ 이므로

$$4 - k = 3(k + 4), k = -2$$

즉, 점 P의 x좌표는 -2이고 점 P가 쌍곡선  $x^2 - \frac{y^2}{15} = 1$  위의 제3사분면에 있으므로

$$4 - \frac{y^2}{15} = 1, y^2 = 45 \text{에서 } y = -3\sqrt{5}$$

즉, 점 P의 좌표는  $(-2, -3\sqrt{5})$ 이다.

$$\overline{PF} = \sqrt{\{4 - (-2)\}^2 + \{0 - (-3\sqrt{5})\}^2} = \sqrt{36 + 45} = 9$$

$$\overline{OF} = 4$$

$$\overline{PO} = \sqrt{(-2)^2 + (-3\sqrt{5})^2} = \sqrt{4 + 45} = 7$$

따라서 삼각형 PFO의 둘레의 길이는

$$\overline{PF} + \overline{OF} + \overline{PO} = 9 + 4 + 7 = 20$$

답 20

5 쌍곡선  $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{k^2} = -1$ 의 점근선 중 기울기가 양수인 직선

의 방정식은  $y = \frac{k}{\sqrt{3}}x$ 이므로 이 직선에 수직이고 원점을 지나는 직선의 방정식은

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{k}x, \text{ 즉 } \sqrt{3}x + ky = 0$$

한 초점 F의 y좌표를 c라 하면

$$c^2 = 3 + k^2$$

점 F(0, c)와 직선  $\sqrt{3}x + ky = 0$  사이의 거리가 2이므로

$$\frac{|kc|}{\sqrt{3+k^2}} = \frac{k\sqrt{3+k^2}}{\sqrt{3+k^2}} = 2$$

$$k = 2$$

따라서 쌍곡선  $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = -1$ 의 주축의 길이는

$$2 \times 2 = 4$$

답 ⑤

6  $x^2 - 8x - 4y^2 + 24y - 36 = 0$ 에서

$$(x-4)^2 - 4(y-3)^2 = 16, \frac{(x-4)^2}{16} - \frac{(y-3)^2}{4} = 1$$

쌍곡선  $\frac{(x-4)^2}{16} - \frac{(y-3)^2}{4} = 1$ 은 쌍곡선  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$

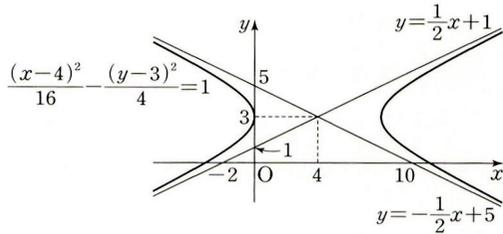
을 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동

한 것이므로 쌍곡선  $\frac{(x-4)^2}{16} - \frac{(y-3)^2}{4} = 1$ 의 두 점근선

의 방정식은

$$y - 3 = \frac{2}{4}(x - 4), y - 3 = -\frac{2}{4}(x - 4)$$

즉,  $y = \frac{1}{2}x + 1$ ,  $y = -\frac{1}{2}x + 5$ 이다.



이때 두 점근선의 교점의 좌표가 (4, 3)이므로 두 점근선과  $x$ 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times (10+2) \times 3 = 18$$

답 ③

7 쌍곡선  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  위의 점 (3, 2)에서의 접선의 방정식

은  $\frac{3x}{a^2} - \frac{2y}{b^2} = 1$ , 즉  $y = \frac{3b^2}{2a^2}x - \frac{b^2}{2}$  이므로

$$\frac{3b^2}{2a^2} = \frac{3}{2} \text{에서 } \frac{b^2}{a^2} = 1, a^2 = b^2$$

한편, 점 (3, 2)가 쌍곡선  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  위의 점이므로

$$\frac{9}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1 \text{에서 } \frac{5}{a^2} = 1$$

$$a^2 = 5, b^2 = 5$$

따라서  $a^2 + b^2 = 5 + 5 = 10$

답 ③

8 점 P(2, 1)에서 쌍곡선  $2x^2 - y^2 = -1$ 에 그은 접선의 접점을  $(x_1, y_1)$ 이라 하면 접선의 방정식은

$$2x_1x - y_1y = -1$$

점 P(2, 1)이 이 접선 위의 점이므로  $4x_1 - y_1 = -1$

또 점  $(x_1, y_1)$ 은 쌍곡선 위의 점이므로  $2x_1^2 - y_1^2 = -1$ 에서

$$2x_1^2 - (4x_1 + 1)^2 = -1$$

$$7x_1^2 + 4x_1 = 0, x_1(7x_1 + 4) = 0$$

$$x_1 = 0 \text{ 또는 } x_1 = -\frac{4}{7}$$

즉, 두 접점의 좌표는  $(0, 1)$ ,  $(-\frac{4}{7}, -\frac{9}{7})$ 이다.

이때 A(0, 1), B $(-\frac{4}{7}, -\frac{9}{7})$ 라 하면 점 A를 접점으로 하는 접선의 방정식은  $y = 1$ 이므로 점 B $(-\frac{4}{7}, -\frac{9}{7})$ 와 직선

$y = 1$  사이의 거리는  $1 - (-\frac{9}{7}) = \frac{16}{7}$ 이다.

따라서  $\overline{PA} = 2$ 이므로 삼각형 PAB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2 \times \frac{16}{7} = \frac{16}{7}$$

답 ②

Level

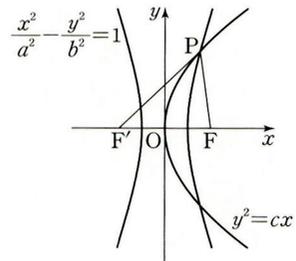
2 기본 연습

본문 36~37쪽

- 1 ①      2 ②      3 ③      4 ①      5 28  
6 ③

1 포물선  $y^2 = cx$ 의 초점이 F(2, 0)이므로

$$y^2 = 4 \times \frac{c}{4} \times x \text{에서 } \frac{c}{4} = 2, c = 8$$



쌍곡선  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 두 초점이 F(2, 0), F'(-2, 0)이므로  $a^2 + b^2 = 4$  ..... ㉠

점 P의 좌표를  $(\alpha, \beta)$ 라 하면 삼각형 PF'F의 넓이가  $4\sqrt{6}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times \overline{FF'} \times \beta = 4\sqrt{6}, \frac{1}{2} \times 4 \times \beta = 4\sqrt{6}, \beta = 2\sqrt{6}$$

이때 점 P가 포물선  $y^2 = 8x$  위의 점이므로

$$(2\sqrt{6})^2 = 8\alpha \text{에서 } \alpha = 3$$

즉, 점 P의 좌표는  $(3, 2\sqrt{6})$ 이다.

점 P가 쌍곡선  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  위의 점이므로

$$\frac{9}{a^2} - \frac{24}{b^2} = 1, 9b^2 - 24a^2 = a^2b^2 \text{ ..... ㉡}$$

㉠에서  $a^2 = 4 - b^2$ 이므로 ㉡에 대입하면

$$9b^2 - 24(4 - b^2) = (4 - b^2)b^2$$

$$b^4 + 29b^2 - 96 = 0, (b^2 - 3)(b^2 + 32) = 0$$

$$b^2 > 0 \text{이므로 } b^2 = 3, a^2 = 1$$

따라서  $a^2 - b^2 + c = 1 - 3 + 8 = 6$

답 ①

2 쌍곡선의 정의에 의하여  $\overline{PF} - \overline{PF'} = 2a$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{PF} &= \overline{PF'} + 2a \\ \overline{AP} + \overline{PF} &= \overline{AP} + (\overline{PF'} + 2a) \\ &= \overline{AP} + \overline{PF'} + 2a \geq \overline{AF'} + 2a \end{aligned}$$

이때  $\overline{AF'} = \sqrt{(2+3)^2 + 12^2} = 13$ 이므로  $\overline{AP} + \overline{PF}$ 의 최솟값은  $13 + 2a$ 이다.

즉,  $13 + 2a = 17$ 에서  $a = 2$

두 점  $F(3, 0)$ ,  $F'(-3, 0)$ 이 초점이므로

$$a^2 + b^2 = 9 \text{에서 } 4 + b^2 = 9, b^2 = 5$$

따라서  $a^2 \times b^2 = 4 \times 5 = 20$

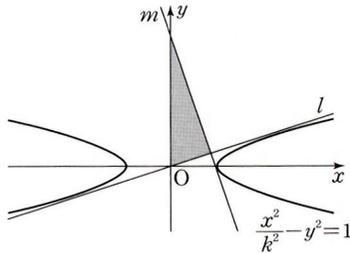
답 ②

3 쌍곡선  $\frac{x^2}{k^2} - y^2 = 1$ 의 점근선 중 기울기가 양수인 직선의 방정식은  $y = \frac{x}{k}$ 이고, 이 직선에 수직인 직선의 기울기는  $-k$ 이다.

기울기가  $-k$ 이고 쌍곡선  $\frac{x^2}{k^2} - y^2 = 1$ 에 접하는 직선 중  $y$ 절편이 양수인 직선의 방정식은

$$y = -kx + \sqrt{k^2 \times k^2 - 1}, \text{ 즉 } y = -kx + \sqrt{k^4 - 1}$$

이고, 이 직선의  $y$ 절편은  $\sqrt{k^4 - 1}$ 이다.



이때 두 직선  $l, m$ 의 교점의  $x$ 좌표는

$$\frac{x}{k} = -kx + \sqrt{k^4 - 1} \text{에서}$$

$$\left(\frac{1}{k} + k\right)x = \sqrt{k^4 - 1}, x = \frac{k\sqrt{k^4 - 1}}{k^2 + 1}$$

즉, 두 직선  $l, m$ 과  $y$ 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times \sqrt{k^4 - 1} \times \frac{k\sqrt{k^4 - 1}}{k^2 + 1} &= \frac{k(k^4 - 1)}{2(k^2 + 1)} \\ &= \frac{k(k^2 - 1)(k^2 + 1)}{2(k^2 + 1)} \\ &= \frac{k(k^2 - 1)}{2} \end{aligned}$$

따라서  $\frac{k(k^2 - 1)}{2} = 12$ 에서

$$k^3 - k - 24 = 0, (k - 3)(k^2 + 3k + 8) = 0$$

$k$ 는 실수이므로  $k = 3$

답 ③

4 쌍곡선  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 주축의 길이가 4이므로

$$2a = 4 \text{에서 } a = 2$$

$$\overline{FF'} = 6 \text{이므로 } a^2 + b^2 = 9 \text{에서 } b^2 = 5$$

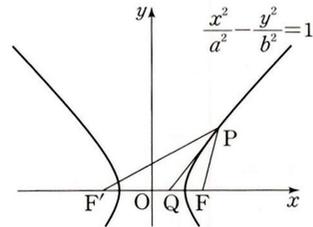
쌍곡선의 정의에 의하여  $\overline{PF'} - \overline{PF} = 4$

$$\overline{PF'} = 2\overline{PF} \text{이므로 } \overline{PF} = 4, \overline{PF'} = 8$$

이때  $\angle F'PQ = \angle FPQ$ 이므로

$$\overline{F'Q} : \overline{FQ} = \overline{PF'} : \overline{PF} = 2 : 1$$

$$\text{즉, } \overline{F'Q} = \overline{FF'} \times \frac{2}{3} = 6 \times \frac{2}{3} = 4$$



삼각형  $PF'F$ 에서  $\overline{PF'} = 8, \overline{PF} = 4, \overline{FF'} = 6$ 이므로 코사인 법칙에 의하여

$$\cos(\angle PF'F) = \frac{8^2 + 6^2 - 4^2}{2 \times 8 \times 6} = \frac{7}{8}$$

삼각형  $PF'Q$ 에서  $\overline{PF'} = 8, \overline{F'Q} = 4$ 이므로 코사인 법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{PQ}^2 &= \overline{PF'}^2 + \overline{F'Q}^2 - 2 \times \overline{PF'} \times \overline{F'Q} \times \cos(\angle PF'F) \\ &= 8^2 + 4^2 - 2 \times 8 \times 4 \times \frac{7}{8} = 24 \end{aligned}$$

$$\overline{PQ} > 0 \text{이므로 } \overline{PQ} = 2\sqrt{6}$$

$$\text{따라서 } \frac{\overline{PQ}}{a^2 - b^2} = \frac{2\sqrt{6}}{4 - 5} = -2\sqrt{6}$$

답 ①

5 쌍곡선  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  위의 점  $P(6, 2)$ 에서의 접선  $l$ 의 방정식은

$$\frac{6x}{a^2} - \frac{2y}{b^2} = 1, \text{ 즉 } y = \frac{3b^2}{a^2}x - \frac{b^2}{2}$$

점 R은 선분 PQ를 지름으로 하는 원 위의 점이므로  
 $\angle PRQ = \frac{\pi}{2}$  이고, 직선 QR의 방정식은  $y = -\frac{a^2}{3b^2}x$ 이다.

점 Q(-6, 2)가 직선  $y = -\frac{a^2}{3b^2}x$  위에 있으므로

$$2 = -\frac{a^2}{3b^2} \times (-6), a = b$$

한편, 점 P(6, 2)는 쌍곡선  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  위의 점이므로

$$\frac{36}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1, \frac{36}{a^2} - \frac{4}{a^2} = 1$$

$$a^2 = 32, b^2 = 32$$

따라서 쌍곡선  $\frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{32} = 1$ 의 두 초점 F, F'의 좌표를

각각 (c, 0), (-c, 0) (c > 0)이라 하면  $c^2 = 32 + 32 = 64$   
 에서 F(8, 0), F'(-8, 0)이고,  $\overline{FF'} = 16$ 이므로 사각형  
 PQF'F의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times (12 + 16) \times 2 = 28$$

답 28

6 점 P(2, 1)이 쌍곡선  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  위의 점이므로

$$\frac{4}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1 \text{에서 } 4b^2 - a^2 = a^2b^2 \quad \text{..... ㉠}$$

쌍곡선의 정의에 의하여  $\overline{PF'} - \overline{PF} = 2a$

양변을 제곱하면  $(\overline{PF'} - \overline{PF})^2 = 4a^2$

$$\overline{PF'}^2 - 2 \times \overline{PF'} \times \overline{PF} + \overline{PF}^2 = 4a^2$$

$$\overline{PF'} \times \overline{PF} = 4 \text{이므로}$$

$$\overline{PF'}^2 + \overline{PF}^2 = 4a^2 + 8$$

이때 두 점 F, F'의 좌표를 각각 (c, 0), (-c, 0) (c > 0)  
 이라 하면

$$(2-c)^2 + 1 + (2+c)^2 + 1 = 4a^2 + 8 \text{에서}$$

$$c^2 = 2a^2 - 1$$

$$\text{또 } a^2 + b^2 = c^2 \text{이므로 } a^2 + b^2 = 2a^2 - 1 \text{에서}$$

$$b^2 = a^2 - 1$$

이 식을 ㉠에 대입하면

$$4(a^2 - 1) - a^2 = a^2(a^2 - 1)$$

$$a^4 - 4a^2 + 4 = 0, (a^2 - 2)^2 = 0$$

$$a^2 = 2, b^2 = 1, c = \sqrt{3}$$

쌍곡선  $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$  위의 점 P(2, 1)에서의 접선 l의 방정

식이  $\frac{2x}{2} - y = 1$ , 즉  $x - y - 1 = 0$ 이므로

$$d_1 = \frac{|\sqrt{3}-1|}{\sqrt{2}}, d_2 = \frac{|-\sqrt{3}-1|}{\sqrt{2}}$$

따라서

$$\begin{aligned} d_1 \times d_2 &= \frac{|\sqrt{3}-1|}{\sqrt{2}} \times \frac{|-\sqrt{3}-1|}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}{2} = 1 \end{aligned}$$

답 ③

Level

**3** 실력 완성 본문 38쪽

---

1 ③      2 ①      3 32

1 쌍곡선  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$ 의 두 초점을 F(c, 0), F'(-c, 0)  
 (c > 0)이라 하면  $c = \sqrt{9+7} = 4$ 이므로 F(4, 0), F'(-4, 0)  
 이고,  $\overline{FF'} = 8$

이때 쌍곡선의 정의에 의하여

$$\overline{PF'} - \overline{PF} = 6 \quad \text{..... ㉠}$$

삼각형 PF'F의 넓이가 삼각형 PFQ의 넓이의 4배이므로

$$\overline{PF'} = 4\overline{PQ}$$

$$\overline{PF} = \overline{PQ} \text{이므로 } \overline{PF'} = 4\overline{PF} \quad \text{..... ㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡을 연립하면 } \overline{PF'} = 8, \overline{PF} = 2$$

이때  $\overline{PF'} = \overline{FF'} = 8$ 이므로 이등변삼각형 PF'F에서

$$\angle FPF' = \theta \text{라 하면 } \cos \theta = \frac{1}{8} \text{이다.}$$

삼각형 QPF에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{QF}^2 = \overline{PF}^2 + \overline{PQ}^2 - 2 \times \overline{PF} \times \overline{PQ} \times \cos(\pi - \theta)$$

$$= 2^2 + 2^2 - 2 \times 2 \times 2 \times \left(-\frac{1}{8}\right) = 9$$

$$\text{이므로 } \overline{QF} = 3$$

답 ③

2 두 점 F(4, -2), F'(-8, -2)에 대하여 선분 FF'의 중  
 점의 좌표가 (-2, -2)이므로 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{(x+2)^2}{a^2} - \frac{(y+2)^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0) \quad \text{..... ㉠}$$

에서 p=2, q=2이고, 원의 방정식은

$$(x+2)^2 + (y+2)^2 = 36 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡을  $x$ 축의 방향으로 2만큼,  $y$ 축의 방향으로 2만큼 평행 이동하면 각각 쌍곡선  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ )과 원  $x^2 + y^2 = 36$ 이 된다.

또 여섯 개의 점 A, B, C, D, F, F'을  $x$ 축의 방향으로 2만큼,  $y$ 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점을 각각 A', B', C', D', G, G'이라 하면 두 점 G, G'은 쌍곡선  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 초점이고 그 좌표는 각각 (6, 0), (-6, 0)이므로  $a^2 + b^2 = 36$  ..... ㉢

한편, 쌍곡선  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 두 점근선의 방정식은  $y = \frac{b}{a}x$ ,  $y = -\frac{b}{a}x$ 이므로 원  $x^2 + y^2 = 36$ 에 대입하면

$$x^2 + \frac{b^2 x^2}{a^2} = 36, (a^2 + b^2)x^2 = 36a^2$$

$$36x^2 = 36a^2, x^2 = a^2$$

$$x = -a \text{ 또는 } x = a$$

즉, 점 A'의  $x$ 좌표는  $a$ 이므로 점 A'의 좌표는  $(a, b)$ 이다.

$$\cos(\angle AFD) = -\frac{2}{3} \text{에서}$$

$$\sin(\angle AFD) = \sqrt{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3} \text{이고,}$$

$$\angle AFD = \angle A'GD' \text{이므로}$$

$$\sin(\angle A'GD') = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

삼각형 A'D'G에서  $\frac{A'D'}{\sin(\angle A'GD')} = \frac{GG'}{\sin(\angle A'GD')}$

$$\frac{A'D'}{\sin(\angle A'GD')} = \frac{GG'}{\sin(\angle A'GD')}$$

$$\frac{2b}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = 12 \text{에서 } b = 2\sqrt{5}$$

㉢에서  $a^2 = 36 - b^2 = 36 - 20 = 16$ 이므로  $a = 4$

따라서

$$\frac{a^2 - b^2}{p + q} = \frac{16 - 20}{2 + 2} = -1$$

답 ①

3 쌍곡선  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 두 점근선의 방정식은

$$y = \frac{b}{a}x, y = -\frac{b}{a}x$$

두 점근선이 서로 수직이므로  $\frac{b}{a} \times \left(-\frac{b}{a}\right) = -1$

$$b^2 = a^2 \text{에서 } a = b$$

한편, 쌍곡선  $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 의 점근선 중 기울기가 양수인 직선의 방정식은  $y = \frac{1}{2}x$ 이고 이 직선에 수직인 직선의 기울기는  $-2$ 이다.

쌍곡선  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$  위의 접점을  $(x_1, y_1)$ 이라 하면 접선의 방정식은

$$\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{a^2} = 1, \text{ 즉 } y = \frac{x_1}{y_1}x - \frac{a^2}{y_1}$$

$$\frac{x_1}{y_1} = -2 \text{에서 } y_1 = -\frac{1}{2}x_1 \text{이므로 두 점 A, B는 직선}$$

$$y = -\frac{1}{2}x \text{ 위에 있다.}$$

또 접점  $(x_1, y_1)$ 은 쌍곡선  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$  위의 점이므로

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{a^2} = 1 \text{이고, } x_1 = -2y_1 \text{을 대입하면}$$

$$\frac{4y_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{a^2} = 1, y_1^2 = \frac{a^2}{3}$$

$$y_1 = -\frac{a}{\sqrt{3}} \text{ 또는 } y_1 = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$\text{즉, } A\left(-\frac{2a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{\sqrt{3}}\right), B\left(\frac{2a}{\sqrt{3}}, -\frac{a}{\sqrt{3}}\right) \text{이므로}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{\left(\frac{4a}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(-\frac{2a}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2\sqrt{5}a}{\sqrt{3}}$$

이때 점  $P(\sqrt{3}, \sqrt{3})$ 과 직선  $y = -\frac{1}{2}x$ , 즉  $x + 2y = 0$  사이의 거리는

$$\frac{|\sqrt{3} + 2\sqrt{3}|}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \text{이므로 삼각형 PAB의 넓이는}$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{5}a}{\sqrt{3}} \times \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = 3a$$

따라서  $3a = 12$ 에서  $a = 4$ 이므로

$$a^2 + b^2 = 2a^2 = 32$$

답 32

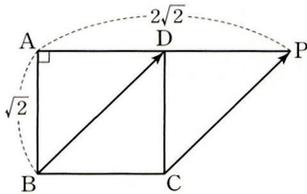
# 04 벡터의 연산

유제		본문 41~49쪽				
1 ④	2 ②	3 ①	4 ⑤	5 ①		
6 3	7 ②	8 ④	9 ⑤	10 ⑤		

1 정사각형 ABCD의 대각선의 길이가  $|\overline{AC}| = \overline{AC} = 2$ 이므로 정사각형의 한 변의 길이는

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \overline{AC} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

이때  $\overline{BD} = \overline{CP}$ 에서 사각형 BCPD는 평행사변형이므로 점 P는 선분 AD를 2 : 1로 외분하는 점이다.



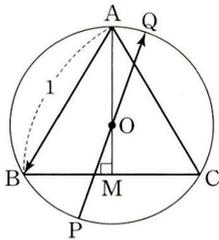
이때  $\angle BAP = \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\overline{BP} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{2+8} = \sqrt{10}$$

따라서  $|\overline{BP}| = \overline{BP} = \sqrt{10}$

답 ④

2  $\overline{AB}$ 가 단위벡터이므로  $|\overline{AB}| = 1$ 이다.



한 변의 길이가 1인 정삼각형 ABC의 외접원의 중심을 O라 하면 점 O는 정삼각형 ABC의 무게중심과 일치한다.

선분 BC의 중점을 M이라 하면

$$\overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2} \overline{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

이므로 외접원의 반지름의 길이는

$$\overline{AO} = \frac{2}{3} \overline{AM} = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

원 위의 서로 다른 두 점 P, Q에 대하여  $|\overline{PQ}|$ 의 최댓값은 원의 지름과 같으므로  $|\overline{PQ}|$ 의 최댓값은

$$2\overline{AO} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

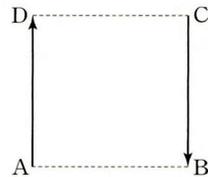
답 ②

참고

정삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 사

$$\text{인법칙에 의하여 } \frac{\overline{AB}}{\sin \frac{\pi}{3}} = 2R \text{에서 } R = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

3



$$\overline{CB} = -\overline{AD} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \overline{AB} + \overline{AD} + \overline{CB} + \overline{BD} &= (\overline{AB} + \overline{BD}) + (\overline{AD} + \overline{CB}) \\ &= \overline{AD} + (\overline{AD} - \overline{AD}) \\ &= \overline{AD} + \vec{0} = \overline{AD} \end{aligned}$$

따라서  $|\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{CB} + \overline{BD}| = |\overline{AD}| = \overline{AD} = 1$

답 ①

다른 풀이

$$\overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AC} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} (\overline{AB} + \overline{AD}) + \overline{CB} + \overline{BD} &= (\overline{AC} + \overline{CB}) + \overline{BD} \\ &= \overline{AB} + \overline{BD} = \overline{AD} \end{aligned}$$

따라서  $|\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{CB} + \overline{BD}| = |\overline{AD}| = \overline{AD} = 1$

4 마름모 ABCD는 평행사변형이므로  $\overline{AD} = \overline{BC}$ ,  $\overline{AB} = \overline{DC}$ 이다.

$$\overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC} \text{이므로}$$

$$|\overline{AB} + \overline{AD}| = \overline{AC}$$

$$\overline{AB} + \overline{CB} = \overline{DC} + \overline{CB} = \overline{DB} \text{이므로}$$

$$|\overline{AB} + \overline{CB}| = |\overline{DB}| = \overline{DB}$$

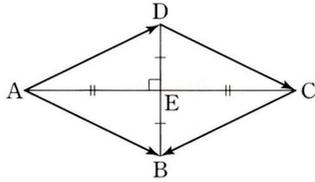
그러므로  $|\overline{AB} + \overline{AD}| = 2|\overline{AB} + \overline{CB}|$ 에서

$$\overline{AC} = 2\overline{DB}$$

마름모의 두 대각선은 서로 수직이등분하므로 두 대각선

AC, BD의 교점을 E라 하면

$$\overline{AE} : \overline{DE} = \overline{AC} : \overline{BD} = 2 : 1$$



$\overline{DE}=k, \overline{AE}=2k$ 라 하면 직각삼각형 AED에서

$$k^2 + (2k)^2 = 2^2, \text{ 즉 } k = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

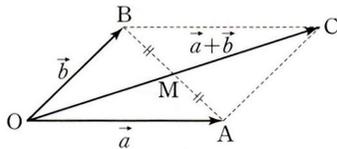
이므로

$$\begin{aligned} |\overline{AC}| &= \overline{AC} = 2\overline{AE} = 2 \times 2k = 4k \\ &= 4 \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{8\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

답 ⑤

**참고**

두 벡터  $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ 에 대하여 사각형 OACB가 평행사변형이 되도록 점 C를 잡으면  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$ 이다.



그런데 평행사변형의 두 대각선은 서로 이등분하므로 선분 AB의 중점을 M이라 하면  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OM}$ 이 성립한다. 한편, 선분 AB의 중점 M에 대하여  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OM}$ 이 성립함을 다음과 같이 보일 수도 있다.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} &= (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB}) \\ &= (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM}) + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \\ &= 2\overrightarrow{OM} + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AM}) \quad (\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AM} \text{이므로}) \\ &= 2\overrightarrow{OM} + \vec{0} = 2\overrightarrow{OM} \end{aligned}$$

5  $\vec{p} = 2\vec{a} - \vec{b},$   
 $\vec{q} - \vec{p} = (3\vec{a} + k\vec{b}) - (2\vec{a} - \vec{b})$   
 $= (3-2)\vec{a} + (k+1)\vec{b} = \vec{a} + (k+1)\vec{b}$

두 벡터  $\vec{p}, \vec{q} - \vec{p}$ 는 영벡터가 아니므로 이 두 벡터가 서로 평행하려면  $t\vec{p} = \vec{q} - \vec{p}$ 를 만족시키는 실수  $t$ 가 존재해야 한다.

즉,  $t(2\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} + (k+1)\vec{b}$

$2t\vec{a} - t\vec{b} = \vec{a} + (k+1)\vec{b}$

두 벡터  $\vec{a}, \vec{b}$ 는 영벡터가 아니고 서로 평행하지 않으므로

$2t = 1, -t = k + 1$

따라서  $t = \frac{1}{2}$ 이므로

$k = -t - 1 = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$

답 ①

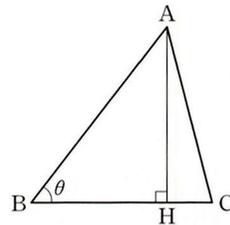
6 예각삼각형 ABC에서  $\angle ABC = \theta$ 라 하면  $\sin \theta = \frac{4}{5}$ 에서

$\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$

점 A에서 직선 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{AH} = \overline{AB} \sin \theta = 5 \times \frac{4}{5} = 4,$

$\overline{BH} = \overline{AB} \cos \theta = 5 \times \frac{3}{5} = 3$



한편,

$t\overline{BC} = \overline{BX} \dots \textcircled{7}$

라 하면 점 X는 직선 BC 위의 점이고,

$f(t) = |\overline{BA} - t\overline{BC}| = |\overline{BA} - \overline{BX}| = |\overline{XA}|$

이때  $|\overline{XA}|$ 의 값이 최소인 경우는 점 X가 점 H와 일치할 때이고,

$\overline{BH} = \frac{\overline{BH}}{\overline{BC}} \overline{BC} = \frac{3}{4} \overline{BC} \dots \textcircled{8}$

또 점 X가 점 H와 일치할 때 ⑦에서  $\overline{BH} = t\overline{BC}$ 이므로 ⑧에서

$t = \frac{3}{4}, \text{ 즉 } a = \frac{3}{4}$

$f(t) = |\overline{XA}|$ 의 최솟값은  $m = \overline{AH} = 4$

따라서  $a \times m = \frac{3}{4} \times 4 = 3$

답 3

7  $\overline{AB} = |\overline{AB}| = |\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}| = |\vec{b} - \vec{a}| = 2$

$\overline{AC} = |\overline{AC}| = |\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}| = |\vec{c} - \vec{a}|$

이므로  $\vec{c} - \vec{a} = (3\vec{a} - 2\vec{b}) - \vec{a} = 2(\vec{a} - \vec{b})$

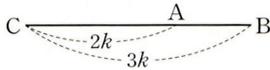
따라서

$\overline{AC} = |\vec{c} - \vec{a}| = |2(\vec{a} - \vec{b})| = 2|\vec{a} - \vec{b}| = 2 \times 2 = 4$

답 ②

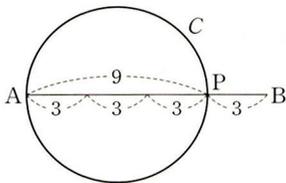
**다른 풀이**

$\vec{c} = 3\vec{a} - 2\vec{b} = \frac{2\vec{b} - 3\vec{a}}{2-3}$  이므로 점 C는 선분 AB를 2 : 3으로 외분하는 점이다.  
 즉,  $\overline{AC} : \overline{BC} = 2 : 3$ 이고  $\overline{AB} < \overline{BC}$ 이므로 세 점 A, B, C의 위치 관계는 그림과 같다.



이때  $\overline{AC} = 2k$ ,  $\overline{BC} = 3k$  ( $k > 0$ )이라 하면  
 $\overline{AB} = \overline{BC} - \overline{AC} = 3k - 2k = k$   
 이므로  $\overline{AB} = 2$ 에서  $k = 2$ 이다.  
 따라서  $\overline{AC} = 2k = 4$

- 8  $\overline{OP} = \frac{\vec{a} + 3\vec{b}}{4} = \frac{3 \times \vec{b} + 1 \times \vec{a}}{3+1}$ 에서 점 P는 선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점이다.  
 이때  $\overline{AB} = 12$ 이므로  $\overline{AP} : \overline{BP} = 3 : 1$ 에서  
 $\overline{AP} = \frac{3}{3+1} \overline{AB} = \frac{3}{4} \times 12 = 9$



두 점 A, P를 지나는 원을 C라 하면 원 C는 점 A와 점 P를 지나므로 원 C의 반지름의 길이가 최소일 때는 선분 AP가 원 C의 지름일 때이다.  
 따라서 원 C의 반지름의 길이의 최솟값은  $\frac{9}{2}$ 이다.

답 ④

- 9  $2\vec{a} - \vec{b} = 2(2, 3) - (-1, 1) = (4, 6) - (-1, 1)$   
 $= (4 - (-1), 6 - 1) = (5, 5)$

이므로  
 $|2\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$

답 ⑤

- 10 원점 O에 대하여  
 $2\vec{PA} + 3\vec{PB} = 2(\vec{OA} - \vec{OP}) + 3(\vec{OB} - \vec{OP})$   
 $= (2\vec{OA} - 2\vec{OP}) + (3\vec{OB} - 3\vec{OP})$   
 $= 2\vec{OA} + 3\vec{OB} - 5\vec{OP}$  ..... ㉠

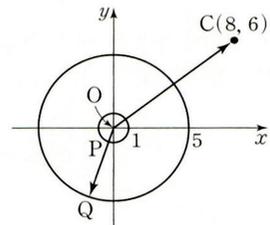
이때  
 $2\vec{OA} + 3\vec{OB} = 2(4, 0) + 3(0, 2)$   
 $= (8, 0) + (0, 6)$   
 $= (8, 6)$

이므로 점 C(8, 6)에 대하여  
 $2\vec{OA} + 3\vec{OB} = \vec{OC}$  ..... ㉡

한편,  
 $5\vec{OP} = \vec{OQ}$  ..... ㉢

라 하면 점 Q는 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 5인 원과 반직선 OP가 만나는 점이다.

㉠, ㉡, ㉢에서  
 $2\vec{PA} + 3\vec{PB} = \vec{OC} - \vec{OQ} = \vec{QC}$   
 이므로  $|2\vec{PA} + 3\vec{PB}| = \overline{QC}$

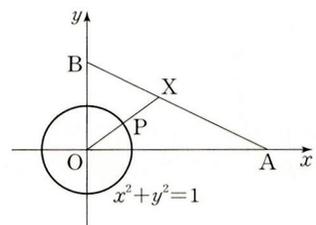


이때  $\overline{QC}$ 의 값이 최소인 경우는 점 Q가 선분 OC 위에 있을 때이고, 이때  
 $\overline{QC} = \overline{OC} - \overline{OQ} = 10 - 5 = 5$   
 이므로  $|2\vec{PA} + 3\vec{PB}|$ 의 최솟값은 5이다.

답 ⑤

**다른 풀이 1**

$2\vec{PA} + 3\vec{PB} = 5\left(\frac{2\vec{PA} + 3\vec{PB}}{5}\right)$ 에서  $\frac{2\vec{PA} + 3\vec{PB}}{5} = \vec{PX}$   
 라 하면  $2\vec{PA} + 3\vec{PB} = 5\vec{PX}$   
 즉,  $\vec{PX} = \frac{2\vec{PA} + 3\vec{PB}}{2+3}$  이므로 점 X는 선분 BA를 2 : 3으로 내분하는 점이다.



두 점 A(4, 0), B(0, 2)에 대하여 선분 BA를 2 : 3으로 내분하는 점 X의 좌표는  
 $\left(\frac{2 \times 4 + 3 \times 0}{2+3}, \frac{2 \times 0 + 3 \times 2}{2+3}\right)$ , 즉  $\left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right)$

$$\overline{OX} = \sqrt{\left(\frac{8}{5}\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2} = \frac{10}{5} = 2 \text{이므로 원 } x^2 + y^2 = 1 \text{ 위의}$$

점 P에 대하여  $|\overline{PX}|$ 의 최솟값은

$$\overline{OX} - 1 = 2 - 1 = 1$$

따라서  $|2\overline{PA} + 3\overline{PB}| = |5\overline{PX}| = 5|\overline{PX}|$ 의 최솟값은

$$5 \times 1 = 5$$

**다른 풀이2**

점 P는 원  $x^2 + y^2 = 1$  위의 점이므로  $\vec{p} = \overline{OP} = (a, b)$ 라 하면  $a^2 + b^2 = 1$

이때

$$\begin{aligned} 2\overline{PA} + 3\overline{PB} &= 2(\overline{OA} - \overline{OP}) + 3(\overline{OB} - \overline{OP}) \\ &= (2\overline{OA} - 2\overline{OP}) + (3\overline{OB} - 3\overline{OP}) \\ &= 2\overline{OA} + 3\overline{OB} - 5\overline{OP} \\ &= 2(4, 0) + 3(0, 2) - 5(a, b) \\ &= (8, 0) + (0, 6) - (5a, 5b) \\ &= (8 - 5a, 6 - 5b) \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} |2\overline{PA} + 3\overline{PB}| &= \sqrt{(8 - 5a)^2 + (6 - 5b)^2} \\ &= 5\sqrt{\left(a - \frac{8}{5}\right)^2 + \left(b - \frac{6}{5}\right)^2} \quad \dots\dots \text{㉠} \end{aligned}$$

㉠에서  $\sqrt{\left(a - \frac{8}{5}\right)^2 + \left(b - \frac{6}{5}\right)^2}$ 의 값은 점  $(a, b)$ 와

점  $\left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right)$  사이의 거리와 같다.

점 X의 좌표를  $\left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right)$ 이라 하면

$$\overline{OX} = \sqrt{\left(\frac{8}{5}\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2} = \frac{10}{5} = 2$$

이므로  $\sqrt{\left(a - \frac{8}{5}\right)^2 + \left(b - \frac{6}{5}\right)^2}$ 의 최솟값은

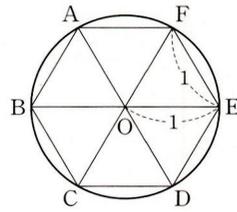
$$\overline{OX} - 1 = 2 - 1 = 1$$

따라서 ㉠에서

$$|2\overline{PA} + 3\overline{PB}| = 5\sqrt{\left(a - \frac{8}{5}\right)^2 + \left(b - \frac{6}{5}\right)^2}$$

의 최솟값은  $5 \times 1 = 5$

1 단위벡터는 크기가 1인 벡터이다.



정육각형 ABCDEF의 세 대각선 AD, BE, CF의 교점을 O라 하면 삼각형 OAB가 정삼각형이고 원의 반지름의 길이가 1이므로 정육각형의 한 변의 길이는 1이다.

그러므로 정육각형의 각 변의 양 끝 점을 시점과 종점으로 하는 벡터는 모두 단위벡터이다.

$$\text{이때 } \overline{AB} = \overline{ED}, \overline{BA} = \overline{DE}, \overline{BC} = \overline{FE}, \overline{CB} = \overline{EF},$$

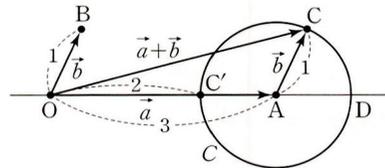
$\overline{CD} = \overline{AF}, \overline{DC} = \overline{FA}$ 이므로 서로 다른 단위벡터의 개수는 6이다.

답 ③

2  $\overline{OA} = \vec{a}, \overline{OB} = \vec{b}$ 라 하면  $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 1$ 에서

$$\overline{OA} = 3, \overline{OB} = 1$$

이때  $\vec{a} + \vec{b} = \overline{OA} + \overline{OB} = \overline{OC}$ 라 하면 그림에서 점 C는 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가  $|\overline{OB}| = \overline{OB} = 1$ 인 원 C 위의 점이다.



이때  $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| - |\vec{b}| = 3 - 1 = 2$ 가 성립하려면 점 C는 원 C와 선분 OA의 교점 C'과 일치해야 한다.

즉,  $\vec{b} = \overline{AC'}$ 이다.

한편, 직선 OA가 원 C와 만나는 점 중 C'이 아닌 점을 D라 하면  $-\overline{AC'} = \overline{AD}$ 이므로

$$\vec{a} - \vec{b} = \overline{OA} - \overline{AC'} = \overline{OA} + \overline{AD} = \overline{OD}$$

따라서  $|\vec{a} - \vec{b}| = |\overline{OD}| = \overline{OD} = \overline{OA} + \overline{AD} = 3 + 1 = 4$

답 ④

**참고**

임의의 두 벡터  $\vec{a}, \vec{b}$ 에 대하여 다음이 성립한다.

$$||\vec{a}| - |\vec{b}|| \leq |\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

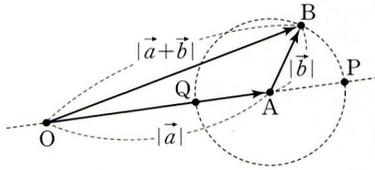
이때 등식  $||\vec{a}| - |\vec{b}|| = |\vec{a} + \vec{b}|$ 는 두 벡터  $\vec{a}, \vec{b}$ 가 반대 방향일 때 성립하고, 등식  $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$ 는 두 벡터  $\vec{a}, \vec{b}$ 가 같은 방향일 때 성립한다.

Level

**1 기초 연습**

본문 50~51쪽

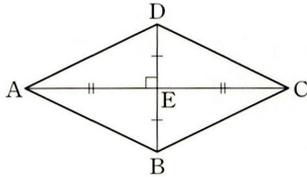
- |     |     |      |     |     |
|-----|-----|------|-----|-----|
| 1 ③ | 2 ④ | 3 ③  | 4 ② | 5 ④ |
| 6 ③ | 7 ① | 8 18 |     |     |



즉, 그림과 같이  $\vec{OA}=\vec{a}$ ,  $\vec{AB}=\vec{b}$ 라 하면  $\vec{a}+\vec{b}=\vec{OB}$ 이므로 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가  $|\vec{b}|$ 인 원과 직선 OA의 두 교점을 P, Q ( $|\vec{OQ}|<|\vec{OP}|$ )라 하면  $|\vec{a}+\vec{b}|$ 의 최댓값과 최솟값은 각각

$$|\vec{OP}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|, |\vec{OQ}|=||\vec{a}|-|\vec{b}||$$

3



마름모 ABCD의 두 대각선의 교점을 E라 하면

$$\vec{AC}=2\vec{AE}, \vec{BD}=2\vec{ED} \text{이므로}$$

$$\vec{AC}+\vec{BD}=2\vec{AE}+2\vec{ED}=2(\vec{AE}+\vec{ED})=2\vec{AD}$$

이때  $|\vec{AC}+\vec{BD}|=6$ 에서  $|2\vec{AD}|=2|\vec{AD}|=6$ 이므로

$$|\vec{AD}|=|\vec{AD}|=3$$

마름모 ABCD의 모든 변의 길이는 서로 같으므로

$$|\vec{AB}|=|\vec{AB}|=|\vec{AD}|=3$$

답 ③

4 정팔각형의 8개의 변의 길이는 모두 같고  $\vec{AB}\parallel\vec{EF}$ 이므로

$$\vec{AB}=\vec{FE}$$

또  $-\vec{DE}=\vec{ED}$ ,  $-\vec{BC}=\vec{CB}$ 이므로

$$\vec{FX}=\vec{AB}-\vec{DE}+\vec{DC}-\vec{BC}=\vec{FE}+\vec{ED}+\vec{DC}+\vec{CB}$$

$$=(\vec{FE}+\vec{ED})+\vec{DC}+\vec{CB}=\vec{FD}+\vec{DC}+\vec{CB}$$

$$=(\vec{FD}+\vec{DC})+\vec{CB}=\vec{FC}+\vec{CB}$$

$$=\vec{FB}$$

따라서  $\vec{FX}=\vec{FB}$ 이므로 점 X와 일치하는 점은 B이다.

답 ②

5 점 M은 선분 BC의 중점이므로  $\vec{CM}=\frac{1}{2}\vec{CB}=\frac{1}{2}\vec{b}$

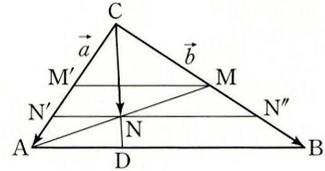
$$\text{따라서 } \vec{CN}=\frac{\vec{CA}+\vec{CM}}{2}=\frac{\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}}{2}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b} \text{에서}$$

$$p=\frac{1}{2}, q=\frac{1}{4} \text{이므로 } p+q=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

답 ④

다른 풀이

선분 AC의 중점을 M'이라 하고, 두 선분 AM', BM의 중점을 각각 N', N''이라 하자.



$$\vec{CN'}=\vec{CM'}+\vec{M'N'}=\frac{1}{2}\vec{CA}+\frac{1}{2}\vec{AM'}$$

$$=\frac{1}{2}\vec{CA}+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\vec{CA}\right)=\frac{3}{4}\vec{CA}$$

$$\text{이므로 } \vec{CN'}=\frac{3}{4}\vec{CA}=\frac{3}{4}\vec{a}$$

$$\text{마찬가지로 } \vec{CN''}=\frac{3}{4}\vec{CB} \text{이므로 } \vec{CN''}=\frac{3}{4}\vec{CB}=\frac{3}{4}\vec{b}$$

점 N은 선분 N'N'' 위에 있으므로 점 N은 선분 N'N''의 내분점이다. 이때 점 N이 선분 N'N''을  $m:n$  ( $m>0, n>0$ )으로 내분한다고 하면

$$\vec{CN}=\frac{m\vec{CN''}+n\vec{CN'}}{m+n}=\frac{m\left(\frac{3}{4}\vec{b}\right)+n\left(\frac{3}{4}\vec{a}\right)}{m+n}$$

$$=\frac{3n}{4(m+n)}\vec{a}+\frac{3m}{4(m+n)}\vec{b}$$

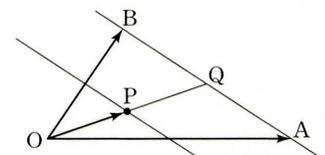
$$\text{이므로 } p=\frac{3n}{4(m+n)}, q=\frac{3m}{4(m+n)}$$

$$\text{따라서 } p+q=\frac{3n+3m}{4(m+n)}=\frac{3(m+n)}{4(m+n)}=\frac{3}{4}$$

참고

위의 **다른 풀이**에서 다음과 같은 성질을 알 수 있다.

서로 다른 세 점 O, A, B와 점 P에 대하여 직선 OP와 직선 AB가 만나는 점을 Q라 할 때,  $\vec{OP}=p\vec{OA}+q\vec{OB}$ 를 만족시키는 두 실수  $p, q$ 에 대하여  $p+q=\frac{|\vec{OP}|}{|\vec{OQ}|}$ 가 성립한다.



$$6 \quad -\vec{a}+3\vec{b}=-(-2, -3)+3(0, 1) \\ = (2, 3)+(0, 3)=(2, 6)$$

이므로 벡터  $-\vec{a}+3\vec{b}$ 의  $y$ 성분은 6이다.

답 ③

7  $\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b}$ 에서  
 $(5, 1) = p(3, -1) + q(2, -2)$   
 $= (3p, -p) + (2q, -2q)$   
 $= (3p+2q, -p-2q)$   
 두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여  
 $3p+2q=5$ 이고  $-p-2q=1$   
 위의 두 등식을 연립하여 풀면  $p=3, q=-2$ 이므로  
 $p+q=3+(-2)=1$

답 ①

8 (i)  $|\vec{AP}|$ 의 최솟값  
 $x$ 축 위의 점 P와 점 A(1, 4) 사이의 거리인  $\vec{AP}$ 는 점 P의 좌표가 (1, 0)일 때 최소이므로  $|\vec{AP}|$ 의 최솟값은  $m_1=4-0=4$

(ii)  $|\vec{AP} + \vec{BP}|$ 의 최솟값  
 선분 AB의 중점을 M이라 하면 점 M의 좌표는  $(\frac{1+5}{2}, \frac{4+1}{2})$ , 즉  $(3, \frac{5}{2})$ 이다.  
 이때  $\vec{AP} + \vec{BP} = -(\vec{PA} + \vec{PB}) = -2\vec{PM}$ 이므로  
 $|\vec{AP} + \vec{BP}| = |-2\vec{PM}| = 2|\vec{PM}|$   
 이때  $x$ 축 위의 점 P와 점 M( $3, \frac{5}{2}$ ) 사이의 거리인  $\vec{MP}$ 는 점 P의 좌표가 (3, 0)일 때 최솟값  $\frac{5}{2}$ 를 가지므로  
 $|\vec{AP} + \vec{BP}| = 2|\vec{PM}|$ 의 최솟값은

$$m_2 = 2 \times \frac{5}{2} = 5$$

(iii)  $|\vec{AP} + \vec{BP} + \vec{CP}|$ 의 최솟값  
 삼각형 ABC의 무게중심을 G라 하면 점 G의 좌표는  $(\frac{1+5+3}{3}, \frac{4+1+4}{3})$ , 즉 (3, 3)

$$\vec{PG} = \frac{\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC}}{3} \text{이므로}$$

$$\vec{AP} + \vec{BP} + \vec{CP} = -(\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC}) = -3\vec{PG}$$

$$\text{이고, } |\vec{AP} + \vec{BP} + \vec{CP}| = |-3\vec{PG}| = 3|\vec{PG}|$$

이때  $x$ 축 위의 점 P와 점 G(3, 3) 사이의 거리  $\vec{GP}$ 는 점 P의 좌표가 (3, 0)일 때 최솟값 3을 가지므로

$$|\vec{AP} + \vec{BP} + \vec{CP}| = 3|\vec{PG}| \text{의 최솟값은}$$

$$m_3 = 3 \times 3 = 9$$

(i), (ii), (iii)에서

$$m_1 + m_2 + m_3 = 4 + 5 + 9 = 18$$

답 18

**다른 풀이**

점 P의 좌표를 (x, 0)이라 하자.

(i)  $\vec{AP} = \vec{OP} - \vec{OA} = (x, 0) - (1, 4) = (x-1, -4)$ 이므로

$$|\vec{AP}| = \sqrt{(x-1)^2 + (-4)^2} \geq 4$$

(단, 등호는  $x=1$ 일 때 성립)

그러므로  $|\vec{AP}|$ 의 최솟값은  $m_1=4$

(ii)  $\vec{BP} = \vec{OP} - \vec{OB} = (x, 0) - (5, 1) = (x-5, -1)$ 에서

$$\vec{AP} + \vec{BP} = (x-1, -4) + (x-5, -1) = (2x-6, -5)$$

이므로

$$|\vec{AP} + \vec{BP}| = \sqrt{(2x-6)^2 + (-5)^2} \geq 5$$

(단, 등호는  $x=3$ 일 때 성립)

그러므로  $|\vec{AP} + \vec{BP}|$ 의 최솟값은  $m_2=5$

(iii)  $\vec{CP} = \vec{OP} - \vec{OC} = (x, 0) - (3, 4) = (x-3, -4)$ 에서

$$\begin{aligned} \vec{AP} + \vec{BP} + \vec{CP} &= (x-1, -4) + (x-5, -1) + (x-3, -4) \\ &= (3x-9, -9) \end{aligned}$$

이므로

$$|\vec{AP} + \vec{BP} + \vec{CP}| = \sqrt{(3x-9)^2 + (-9)^2} \geq 9$$

(단, 등호는  $x=3$ 일 때 성립)

그러므로  $|\vec{AP} + \vec{BP} + \vec{CP}|$ 의 최솟값은  $m_3=9$

(i), (ii), (iii)에서

$$m_1 + m_2 + m_3 = 4 + 5 + 9 = 18$$

Level

**2 기본 연습** 본문 52~53쪽

1 ①	2 ⑤	3 ③	4 ③	5 ④
6 ③	7 ⑤			

1 사각형의 꼭짓점의 개수는 4이므로 사각형의 서로 다른 두 꼭짓점을 각각 시점과 종점으로 하는 벡터의 개수는

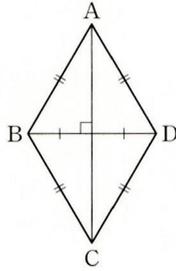
$${}_4P_2 = 4 \times 3 = 12 \quad \dots \textcircled{1}$$

조건 (나)에서 ①의 벡터 중 서로 다른 단위벡터의 개수가 8이므로 사각형 ABCD의 4개의 변과 2개의 대각선 중에서 길이가 1이고 서로 평행하지 않은 선분의 개수는  $4 (=8 \div 2)$ 이어야 한다.  $\dots \textcircled{2}$

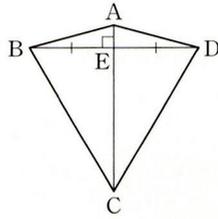
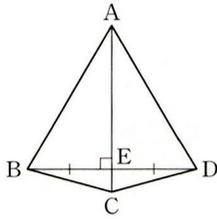
조건 (가)에서 두 점 A, C는 선분 BD의 수직이등분선 위의 점이므로  $\vec{AB} = \vec{AD}, \vec{CB} = \vec{CD}$

(i)  $\overline{AB} = \overline{CB}$  일 때

사각형 ABCD는 마름모이다.  
이때 ㉠을 만족시키려면 마름모 ABCD의 한 변의 길이가 1이고 두 대각선의 길이도 모두 1이어야 하는데, 이는 불가능하다.



(ii)  $\overline{AB} \neq \overline{CB}$  일 때



사각형 ABCD가 ㉠을 만족시키려면

$$\overline{AB} = \overline{AD} = \overline{BD} = \overline{AC} = 1 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

또는

$$\overline{CB} = \overline{CD} = \overline{AC} = \overline{BD} = 1 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

이어야 한다.

이때 두 대각선의 교점을 E라 하면 ㉠에서

$$\overline{AB} = 1, \overline{BE} = \frac{1}{2}$$

이므로 직각삼각형 ABE에서

$$\overline{AE} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

이때  $\overline{CE} = \overline{AC} - \overline{AE} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$  이므로

직각삼각형 BCE에서

$$\overline{BC}^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + 1 - \sqrt{3} + \frac{3}{4} = 2 - \sqrt{3}$$

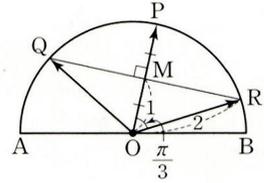
한편, ㉡의 경우에도 마찬가지로  $\overline{BC} = 1, \overline{AB}^2 = 2 - \sqrt{3}$  이다.

따라서

$$|\overline{AB}|^2 + |\overline{BC}|^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = (2 - \sqrt{3}) + 1 = 3 - \sqrt{3}$$

답 ①

2 선분 QR의 중점을 M이라 하면  $\overline{OQ} + \overline{OR} = 2\overline{OM}$ 이므로  $\overline{OP} = \overline{OQ} + \overline{OR}$ 이 성립하려면  $\overline{OP} = 2\overline{OM}$ 이어야 한다. 그러므로 두 선분 QR, OP는 서로 수직이등분해야 한다.



이때  $\overline{OM} = \frac{1}{2} \overline{OP} = \frac{1}{2} \times 2 = 1, \overline{OQ} = \overline{OR} = 2$ 이므로 두

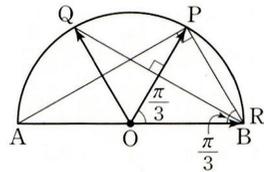
직각삼각형 OMQ, ORM에서  $\angle MOQ = \angle ROM = \frac{\pi}{3}$

$\overline{AP}$ 의 값이 최대인 경우는 점 R이 점 B와 일치할 때이고,

이때 삼각형 ABP는  $\angle ABP = \frac{\pi}{3}$ 인 직각삼각형이므로

$|\overline{AP}|$ 의 최댓값은

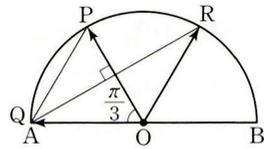
$$M = \overline{AP} = \overline{AB} \sin \frac{\pi}{3} = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$



$\overline{AP}$ 의 값이 최소인 경우는 점 Q가 점 A와 일치할 때이다.

이때 삼각형 AOP는 정삼각형이므로  $|\overline{AP}|$ 의 최솟값은

$$m = \overline{AP} = \overline{OA} = 2$$



따라서  $M \times m = 2\sqrt{3} \times 2 = 4\sqrt{3}$

답 ⑤

3 점 M은 선분 AB의 중점이므로

$$\overline{AM} = \frac{1}{2} \overline{AB} \quad \dots\dots \text{㉠}$$

점 P는 선분 CM을 3 : 1로 내분하므로

$$\overline{AP} = \frac{3\overline{AM} + \overline{AC}}{3+1} = \frac{3}{4} \overline{AM} + \frac{1}{4} \overline{AC} \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에서

$$\overline{AP} = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2} \overline{AB}\right) + \frac{1}{4} \overline{AC} = \frac{3}{8} \overline{AB} + \frac{1}{4} \overline{AC} \quad \dots\dots \text{㉢}$$

따라서 점 P를 지나고 두 직선 AC, AB에 평행한 직선이 두 선분 AB, AC와 만나는 점을 각각 R, S라 하면 사각형 ARPS는 평행사변형이므로

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AR} + \overrightarrow{AS}$$

한편,  $\overrightarrow{AR} = \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{AB}} \overrightarrow{AB}$ ,

$$\overrightarrow{AS} = \frac{\overrightarrow{AS}}{\overrightarrow{AC}} \overrightarrow{AC} \text{이므로}$$

$$\overrightarrow{AP} = \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{AB}} \overrightarrow{AB} + \frac{\overrightarrow{AS}}{\overrightarrow{AC}} \overrightarrow{AC} \quad \dots\dots \textcircled{a}$$

두 벡터  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 는 서로 평행하지 않으므로  $\textcircled{a}, \textcircled{a}$ 에서

$$\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{AB}} = \frac{3}{8}, \frac{\overrightarrow{AS}}{\overrightarrow{AC}} = \frac{1}{4}$$

이때 두 삼각형 ABQ, RBP는 서로 닮은 도형이므로

$$\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{AB}} = \frac{\overrightarrow{QP}}{\overrightarrow{QB}} = \frac{3}{8} \text{에서 } \frac{\overrightarrow{QP}}{\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{BP}} = \frac{3}{8}$$

$$8\overrightarrow{QP} = 3\overrightarrow{QP} + 3\overrightarrow{BP}, 5\overrightarrow{QP} = 3\overrightarrow{BP}$$

즉,  $\overrightarrow{BP} : \overrightarrow{QP} = 5 : 3$ 이므로 점 P는 선분 BQ를 5 : 3으로 내분하는 점이다.

$$\text{따라서 } \overrightarrow{AP} = \frac{5\overrightarrow{AQ} + 3\overrightarrow{AB}}{5+3} = \frac{3}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{8}\overrightarrow{AQ} \text{이므로}$$

$$m = \frac{3}{8}, n = \frac{5}{8} \text{이고,}$$

$$m - n = -\frac{1}{4}$$

답 ③

**다른 풀이**

점 M은 선분 AB의 중점이고, 점 P는 선분 CM을 3 : 1로 내분하므로

$$\overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AM} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} = \frac{3}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

두 벡터  $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AQ}$ 는 서로 평행하므로 실수 t에 대하여  $\overrightarrow{AQ} = t\overrightarrow{AC}$ 이고, 점 P는 선분 BQ를  $0 < s < 1$ 인 실수 s에 대하여 s : (1-s)로 내분하는 점이므로

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= (1-s)\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AQ} \\ &= (1-s)\overrightarrow{AB} + (s \times t)\overrightarrow{AC} \quad \dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

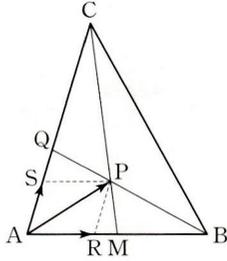
$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 두 벡터  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 는 서로 평행하지 않으므로

$$1-s = \frac{3}{8}, s \times t = \frac{1}{4}$$

$$s = \frac{5}{8}, t = \frac{2}{5}$$

따라서  $m = 1-s = \frac{3}{8}, n = s = \frac{5}{8}$ 이므로

$$m - n = -\frac{1}{4}$$



4 삼각형 ABC의 무게중심 G에 대하여

$$\overrightarrow{PG} = \frac{\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}}{3}$$

$$\overrightarrow{AP} + 2\overrightarrow{BP} + 4\overrightarrow{CP} = 3\overrightarrow{CG} \text{에서}$$

$$-\overrightarrow{PA} - 2\overrightarrow{PB} - 4\overrightarrow{PC} = 3(\overrightarrow{PG} - \overrightarrow{PC})$$

$$= 3\left(\frac{\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}}{3} - \overrightarrow{PC}\right)$$

$$= \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} - 3\overrightarrow{PC}$$

이므로

$$2\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{PB} = -\frac{2}{3}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC}) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

선분 AC의 중점을 M이라 하면  $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} = 2\overrightarrow{PM}$ 이므로

$\textcircled{1}$ 에서

$$\overrightarrow{PB} = -\frac{2}{3}(2\overrightarrow{PM}) = -\frac{4}{3}\overrightarrow{PM}$$

즉, 두 벡터  $\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PM}$ 은 서로 반대 방향이고,

$|\overrightarrow{PB}| : |\overrightarrow{PM}| = 4 : 3$ 이므로 점 P는 선분 BM을 4 : 3으로 내분하는 점이다.

삼각형 ABC의 넓이가 S이면

삼각형 MBC의 넓이는  $\frac{1}{2}S$

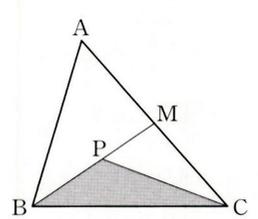
이고, 삼각형 PBC의 넓이는

삼각형 MBC의 넓이의  $\frac{4}{7}$ 배이

므로

$$T = \frac{4}{7} \times \frac{1}{2}S = \frac{2}{7}S$$

따라서  $\frac{T}{S} = \frac{2}{7}$



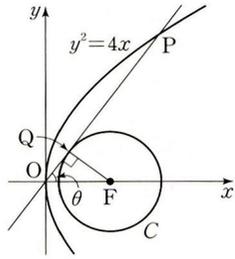
답 ③

5 조건 (나)의  $\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OQ}$  ( $k > 0$ )에서 두 벡터  $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}$ 는 서로 평행하므로 세 점 O, P, Q는 한 직선 위에 있고,

$$k = \frac{|\overrightarrow{OP}|}{|\overrightarrow{OQ}|} = \frac{\overrightarrow{OP}}{\overrightarrow{OQ}} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 조건 (가)에서 점 Q의 y좌표는 양수이므로 두 점 P, Q는 제1사분면에 있다.

이때 포물선  $y^2 = 4x$  위의 점 P에 대하여 점 Q가 오직 하나 존재하므로 직선 OP는 원 C와 점 Q에서 접해야 한다.



포물선  $y^2=4x$ 의 초점은  $F(1, 0)$ 이고 원  $C$ 의 반지름의 길이는  $\frac{4}{5}$ 이므로 직각삼각형  $OFQ$ 에서

$$OQ = \sqrt{1^2 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$$

$$\angle FOQ = \theta \text{라 하면 } \tan \theta = \frac{FQ}{OQ} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3} \text{이므로 직선}$$

$OP$ 의 기울기는  $\frac{4}{3}$ 이고, 직선  $OP$ 의 방정식은  $y = \frac{4}{3}x$ 이다.

$y^2=4x$ 에  $y = \frac{4}{3}x$ 를 대입하면  $\frac{16}{9}x^2 = 4x$ 에서  $x=0$  또는  $x = \frac{9}{4}$ 이므로 점  $P$ 의  $x$ 좌표는  $\frac{9}{4}$ 이다.

한편,  $\cos \theta = \frac{OQ}{OF} = \frac{3}{5}$ 이므로 점  $Q$ 의  $x$ 좌표는

$$OQ \cos \theta = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$$

이때 두 선분  $OP$ ,  $OQ$ 의 길이의 비는 두 점  $P$ ,  $Q$ 의  $x$ 좌표의 비와 같다.

$$\text{즉, } \overline{OP} : \overline{OQ} = \frac{9}{4} : \frac{9}{25} = 25 : 4$$

이므로 ㉠에서

$$k = \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} = \frac{25}{4}$$

답 ④

6 직각삼각형  $OAB$ 에서

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{OB}^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \text{이므로}$$

$$\overline{AM} = \overline{BM} = 2$$

그러므로 두 원  $C_1$ ,  $C_2$ 의 반지름의 길이는 모두 2이고,

$$\overline{OM} = \sqrt{\overline{OB}^2 + \overline{BM}^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

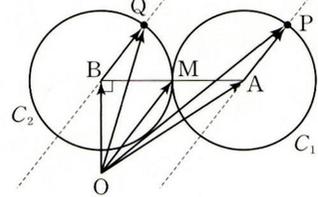
이때

$$\begin{aligned} \overline{OP} + \overline{OQ} &= (\overline{OA} + \overline{AP}) + (\overline{OB} + \overline{BQ}) \\ &= (\overline{OA} + \overline{OB}) + (\overline{AP} + \overline{BQ}) \\ &= 2\overline{OM} + \overline{AP} + \overline{BQ} \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} |\overline{OP} + \overline{OQ}| &\leq |2\overline{OM}| + |\overline{AP}| + |\overline{BQ}| \\ &= 2|\overline{OM}| + |\overline{AP}| + |\overline{BQ}| \\ &= 2 \times \sqrt{13} + 2 + 2 = 4\sqrt{13} + 4 \end{aligned}$$

(단, 등호는 세 벡터  $\overline{OM}$ ,  $\overline{AP}$ ,  $\overline{BQ}$ 가 모두 같은 방향일 때 성립한다.)



따라서 위의 그림과 같이 두 벡터  $\overline{AP}$ ,  $\overline{BQ}$ 가 모두 벡터  $\overline{OM}$ 과 같은 방향일 때,  $|\overline{OP} + \overline{OQ}|$ 는 최댓값  $4\sqrt{13} + 4$ 을 갖는다.

답 ③

7 타원  $E$ 의 초점  $F$ 의  $x$ 좌표를  $c$  ( $c > 0$ )이라 하면  $c^2 = 9 - 5 = 4$ 이므로  $c = 2$ 이고, 선분  $OF$ 의 중점  $M$ 의 좌표는  $(1, 0)$ 이다.

또 타원  $E$ 의 장축의 한 끝점  $A$ 의 좌표는  $(3, 0)$ 이다.

한편,

$$\begin{aligned} \overline{MA} + \overline{MP} &= (\overline{OA} - \overline{OM}) + (\overline{OP} - \overline{OM}) \\ &= \overline{OP} + \overline{OA} - 2\overline{OM} \quad \dots\dots \text{㉠} \end{aligned}$$

이고,  $\overline{OM} = \overline{MF} = \overline{FA} = 1$ 이므로

$$-2\overline{OM} = 2\overline{MO} = \overline{FO} = \overline{AM}$$

이때

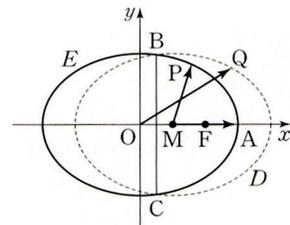
$$\overline{OA} - 2\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{AM} = \overline{OM} \quad \dots\dots \text{㉡}$$

이므로 ㉠, ㉡에서

$$\overline{MA} + \overline{MP} = \overline{OP} + \overline{OM}$$

그러므로  $\overline{OQ} = \overline{MA} + \overline{MP}$ , 즉  $\overline{OQ} = \overline{OP} + \overline{OM}$ 이다.

이때 점  $P$ 는 타원  $E$  위를 움직이므로 점  $Q$ 가 나타내는 도형  $D$ 는 타원  $E$ 를  $x$ 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 타원이고, 두 타원  $E$ ,  $D$ 는 선분  $OM$ 의 수직이등분선에 대하여 서로 대칭이다.



즉, 두 타원 E, D의 교점을 B, C라 하면 두 점 B, C의 x좌표는 모두  $\frac{1}{2}$ 이다.

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1 \text{에 } x = \frac{1}{2} \text{을 대입하면}$$

$$\frac{1}{9} + \frac{y^2}{5} = 1, y^2 = 5 \times \left(1 - \frac{1}{36}\right) = \frac{175}{36}$$

$$\text{이므로 } y = \pm \frac{5\sqrt{7}}{6}$$

따라서 두 점 B, C의 y좌표는 각각  $\frac{5\sqrt{7}}{6}, -\frac{5\sqrt{7}}{6}$ 이므로

두 교점 B, C 사이의 거리는

$$2 \times \frac{5\sqrt{7}}{6} = \frac{5\sqrt{7}}{3}$$

답 ⑤

따라서  $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{DA} + \vec{x} = k\overrightarrow{AE}$ 에서

$$\vec{a} + 3\vec{b} + p\vec{a} + q\vec{b} = k(\vec{a} + \vec{b})$$

$$\text{이므로 } (1+p)\vec{a} + (3+q)\vec{b} = k\vec{a} + k\vec{b} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 두 벡터  $\vec{a}, \vec{b}$ 는 서로 평행하지 않으므로  $\textcircled{1}$ 이 성립하려면  $1+p=k$ 이고  $3+q=k$ 이어야 한다.

즉,  $1+p=3+q$ 에서  $q=p-2$ 이므로

$$\vec{x} = p\vec{a} + (p-2)\vec{b}$$

$\textcircled{1}$ 에서  $|p| \leq 2, |p-2| \leq 2$ 이어야 하므로 정수 p의 값이 될 수 있는 수는 0, 1, 2이다.

$$p=0 \text{이면 } \vec{x} = -2\vec{b} = \overrightarrow{EB}$$

$$p=1 \text{이면 } \vec{x} = \vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AB}$$

$$p=2 \text{이면 } \vec{x} = 2\vec{a} = \overrightarrow{AD}$$

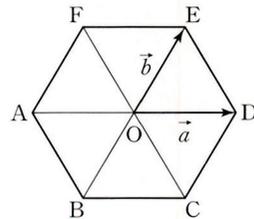
따라서 주어진 조건을 만족시키는 서로 다른 벡터는  $\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{ED}(=\overrightarrow{AB}), \overrightarrow{AD}$ 의 3개이다.

답 ②

**참고**

위의 풀이에서

$$\vec{x} = p\vec{a} + (p-2)\vec{b} = p(\vec{a} + \vec{b}) - 2\vec{b} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

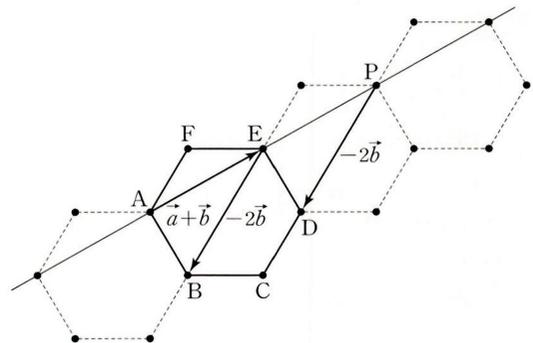


[그림 1]

이때  $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{AE}$ 이므로 벡터  $p(\vec{a} + \vec{b})$ 는 벡터  $\overrightarrow{AE}$ 와 평행하고,  $-2\vec{b} = \overrightarrow{EB}$ 이다.

따라서  $\vec{x} = \overrightarrow{AX}$ 라 하면  $\textcircled{1}$ 에서

$$\overrightarrow{AX} = p\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$



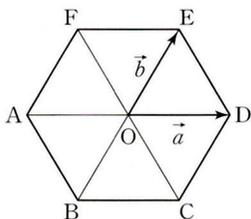
[그림 2]

이때 벡터  $\overrightarrow{AX}$ 가 조건 (가), (나)를 만족시키는 경우는  $\textcircled{2}$ 에서 다음과 같다.

Level 3 실력 완성 본문 54쪽

1 ②    2 ③    3 13

1



정육각형의 세 대각선 AD, BE, CF의 교점을 O라 하고,  $\vec{a} = \overrightarrow{OD}, \vec{b} = \overrightarrow{OE}$ 라 하자.

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{OE} = \vec{b}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CE} &= \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} \\ &= \vec{b} - \vec{a} + \vec{b} = 2\vec{b} - \vec{a} \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{AD} = -2\overrightarrow{OD} = -2\vec{a}$$

이므로

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{DA} &= \vec{b} + (2\vec{b} - \vec{a}) - (-2\vec{a}) \\ &= \vec{b} + 2\vec{b} - \vec{a} + 2\vec{a} = \vec{a} + 3\vec{b} \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \vec{a} + \vec{b}$$

한편, 조건 (가)를 만족시키는 벡터  $\vec{x}$ 가 되기 위한 필요조건은  $\vec{x} = p\vec{a} + q\vec{b}$  ( $p, q$ 는  $|p| \leq 2, |q| \leq 2$ 인 정수)  $\dots\dots \textcircled{1}$

(i)  $p=0$ 일 때

$$\overrightarrow{AX} = \vec{0} + \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EB}$$

(ii)  $p=1$ 일 때

$$\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AB}$$

한편,  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED}$ 이므로  $\overrightarrow{AX}$ 가 될 수 있는 벡터는

$$\overrightarrow{AB} (= \overrightarrow{ED}) \text{이다.}$$

(iii)  $p=2$ 일 때

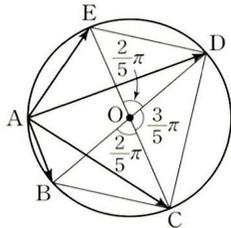
[그림 2]의 점 P에 대하여

$$\overrightarrow{AX} = 2\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PD} = \overrightarrow{AD}$$

한편,  $p \neq 0, p \neq 1, p \neq 2$ 인 모든 실수  $p$ 에 대하여 ㉔을 만족시키고 정육각형 ABCDEF의 꼭짓점인 점 X는 존재하지 않는다.

따라서 주어진 조건을 만족시키는 서로 다른 벡터는  $\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{AB} (= \overrightarrow{ED}), \overrightarrow{AD}$ 의 3개이다.

2



원의 중심을 O라 하면 원주각의 성질에 의하여

$$\angle BOC = 2 \times \frac{\pi}{5} = \frac{2}{5}\pi$$

$$\angle COD = 2 \times \frac{3}{10}\pi = \frac{3}{5}\pi$$

$$\angle DOE = 2 \times \frac{\pi}{5} = \frac{2}{5}\pi$$

이때

$$\angle BOC + \angle COD = \frac{2}{5}\pi + \frac{3}{5}\pi = \pi$$

$$\angle COD + \angle DOE = \frac{3}{5}\pi + \frac{2}{5}\pi = \pi$$

이므로 두 선분 BD, CE는 모두 원의 지름이고, 두 선분의 중점은 모두 점 O이다.

따라서

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}) \\ &= 2\overrightarrow{AO} + 2\overrightarrow{AO} = 4\overrightarrow{AO} \end{aligned}$$

이고,  $|\overrightarrow{AO}| = 1$ 이므로

$$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}| = |4\overrightarrow{AO}| = 4|\overrightarrow{AO}| = 4 \times 1 = 4$$

답 ③

3 타원  $E: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 의 두 초점이  $F(c, 0), F'(-c, 0)$

이므로  $c^2 = 25 - 16 = 9$ 이고  $c > 0$ 이므로  $c = 3$

타원 E가 x축과 만나는 점의 x좌표는

$$\frac{x^2}{25} + \frac{0}{16} = 1, x^2 = 25$$

에서  $x = \pm 5$ 이므로 점 A의 좌표는 (5, 0)이다.

한편, 타원 E의 장축의 길이는  $2 \times 5 = 10$ 이므로 타원의 정의에 의하여

$$|F'P| + |FP| = 2 \times 5 = 10$$

$$|F'Q| = \left(1 + \frac{|FP|}{|F'P|}\right) |F'P| \text{에서}$$

$$|F'Q| = \left| \left(1 + \frac{|FP|}{|F'P|}\right) F'P \right| = \left(1 + \frac{|FP|}{|F'P|}\right) \times |F'P|$$

$$= |F'P| + |FP| = |F'P| + |FP| = 10$$

이고,  $1 + \frac{|FP|}{|F'P|}$ 는 1보다 큰 실수이므로

$$|F'Q| = \left(1 + \frac{|FP|}{|F'P|}\right) |F'P| \text{인 점 Q는 반직선 } F'P \text{ 위에 있고}$$

$$|F'Q| = 10 \text{이다.}$$

즉, 점 Q는 점  $F'(-3, 0)$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 10인 원 위의 점이므로 점 Q가 나타내는 도형의 방정식은

$$(x+3)^2 + y^2 = 100$$

$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{FQ}$ 에서  $\overrightarrow{FQ} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AR}$ 이므로 두 벡터  $\overrightarrow{FQ}, \overrightarrow{AR}$ 은 서로 같다.

이때 점 A(5, 0)은 점 F(3, 0)을 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점이므로 점 R은 점 Q를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점이다.

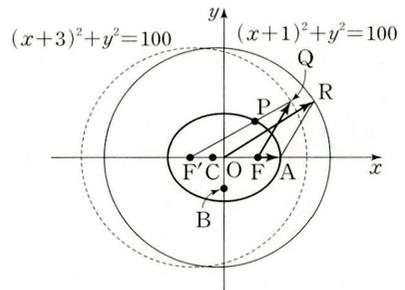
그러므로 점 R이 나타내는 도형은 원  $(x+3)^2 + y^2 = 100$ 을 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 원

$$\{(x-2)+3\}^2 + y^2 = 100$$

$$\text{즉, } (x+1)^2 + y^2 = 100 \quad \dots\dots \text{㉕}$$

원 ㉕의 중심을 C, 반지름의 길이를 r이라 하면

$$C(-1, 0), r = 10 \text{이다.}$$



따라서 점 B(0, -2√2)에 대하여

$$BC = \sqrt{(-1)^2 + (2\sqrt{2})^2} = 3$$

이므로 점 B와 원 ⊙ 위의 점 R 사이의 거리인 |BR|의 최  
댓값은

$$BC + r = 3 + 10 = 13$$

답 13

참고

$$\vec{OR} = \vec{OA} + \vec{FQ} \text{에서}$$

$$\begin{aligned} \vec{OR} &= \vec{OA} + (\vec{OQ} - \vec{OF}) = \vec{OQ} + (\vec{OA} - \vec{OF}) \\ &= \vec{OQ} + \{(5, 0) - (3, 0)\} = \vec{OQ} + (2, 0) \end{aligned}$$

이므로 점 R은 점 Q를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한  
원 위의 점이다.

# 05 벡터의 내적

유제

본문 57~63쪽

1 ①	2 ⑤	3 ①	4 ⑤	5 ②
6 ②	7 ②	8 ①		

1 원점 O에 대하여

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (-2, 1) - (1, 3) = (-3, -2)$$

$$\vec{BC} = \vec{OC} - \vec{OB} = (-1, 2) - (-2, 1) = (1, 1)$$

이므로

$$\begin{aligned} \vec{AB} \cdot \vec{BC} &= (-3, -2) \cdot (1, 1) \\ &= (-3) \times 1 + (-2) \times 1 = -5 \end{aligned}$$

답 ①

2 두 벡터  $\vec{OA}, \vec{OP}$ 가 이루는 각의 크기를  $\theta$ 라 할 때,  $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$

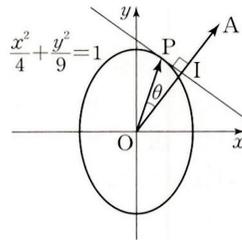
인 경우가 존재하므로  $\vec{OA} \cdot \vec{OP}$ 의 최댓값을 구하기 위해서  
는  $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ 인 경우만 생각해도 충분하다.

$0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ 일 때, 점 P를 지나고 직선 OA에 수직인 직선과

직선 OA의 교점을 I라 하면  $|\vec{OP}| \cos \theta = |\vec{OI}|$ 이므로

$$\vec{OA} \cdot \vec{OP} = |\vec{OA}| |\vec{OP}| \cos \theta = |\vec{OA}| |\vec{OI}|$$

이때  $|\vec{OA}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ 로 일정하므로  $|\vec{OI}|$ 의 값이 최대  
일 때  $|\vec{OA}| |\vec{OI}|$ 도 최대이다.



$|\vec{OI}|$ 의 값이 최대인 경우는 그림과 같이 타원  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

위에 있고 제1사분면에 있는 점 P에서의 접선이 직선 OA  
와 수직일 때이다.

직선 OA의 기울기는  $\frac{4}{3}$ 이므로 직선 OA에 수직인 접선의  
기울기는  $-\frac{3}{4}$ 이어야 한다.

타원  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 에 접하고 기울기가  $-\frac{3}{4}$ 이며 제1사분면을 지나는 직선의 방정식은

$$y = -\frac{3}{4}x + \sqrt{4 \times \left(-\frac{3}{4}\right)^2 + 9}$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{3\sqrt{5}}{2}, \text{ 즉 } 3x + 4y - 6\sqrt{5} = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

직선  $\textcircled{1}$ 과 직선 OA의 교점을 H라 하면  $\overline{OH}$ 는 원점과 직선  $\textcircled{1}$  사이의 거리와 같으므로

$$\overline{OH} = \frac{|-6\sqrt{5}|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

따라서  $\overline{OA} \cdot \overline{OP}$ 의 최댓값은

$$|\overline{OA}| |\overline{OH}| = 5 \times \frac{6\sqrt{5}}{5} = 6\sqrt{5}$$

답 ⑤

**다른 풀이**

점 P의 좌표를  $(x, y)$ 라 하면

$$\overline{OA} \cdot \overline{OP} = (3, 4) \cdot (x, y) = 3x + 4y = k$$

$$3x = k - 4y \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 을  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ , 즉  $9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$ 에 대입하면

$$(k - 4y)^2 + 4y^2 - 36 = 0$$

$$20y^2 - 8ky + k^2 - 36 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4} = 16k^2 - 20(k^2 - 36) = -4k^2 + 720 \geq 0$$

에서  $k^2 \leq 180$

따라서  $-6\sqrt{5} \leq k \leq 6\sqrt{5}$ 이므로  $\overline{OA} \cdot \overline{OP}$ 의 최댓값은  $6\sqrt{5}$ 이다.

**3** 벡터의 내적의 성질에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{CA} \cdot \overline{CB} &= (-\overline{AC}) \cdot (-\overline{BC}) = \overline{AC} \cdot \overline{BC} \\ &= (\overline{AB} + \overline{BC}) \cdot \overline{BC} \\ &= \overline{AB} \cdot \overline{BC} + \overline{BC} \cdot \overline{BC} \\ &= 10 + |\overline{BC}|^2 = 15 \end{aligned}$$

이므로  $|\overline{BC}|^2 = 5$

따라서  $|\overline{BC}| = \sqrt{5}$

답 ①

**4**  $|2\vec{a} - \vec{b}|^2 = (2\vec{a} - \vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b})$

$$= 4(\vec{a} \cdot \vec{a}) - 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) - 2(\vec{b} \cdot \vec{a}) + \vec{b} \cdot \vec{b}$$

$$\begin{aligned} &= 4|\vec{a}|^2 - 4(\vec{a} \cdot \vec{b}) + |\vec{b}|^2 \\ &= 4 \times 2^2 - 4|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \frac{\pi}{3} + |\vec{b}|^2 \\ &= 16 - 4 \times 2 |\vec{b}| \times \frac{1}{2} + |\vec{b}|^2 \\ &= 16 - 4|\vec{b}| + |\vec{b}|^2 \\ &= 21 \end{aligned}$$

이므로

$$|\vec{b}|^2 - 4|\vec{b}| - 5 = 0$$

$$(|\vec{b}| - 5)(|\vec{b}| + 1) = 0$$

$$|\vec{b}| \geq 0 \text{이므로 } |\vec{b}| = 5$$

답 ⑤

**다른 풀이**

$\vec{a} = \overline{OA}$ ,  $\vec{b} = \overline{OB}$ 라 하고,  $2\vec{a} = \overline{OA'}$ 이라 하면

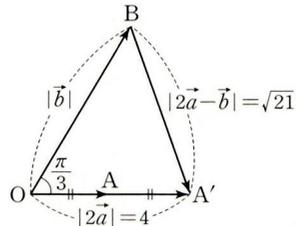
$$\overline{OA'} = 2|\vec{a}| = 2 \times 2 = 4$$

한편,  $2\vec{a} - \vec{b} = \overline{OA'} - \overline{OB} = \overline{BA'}$ 이므로

$$|2\vec{a} - \vec{b}| = \overline{BA'} = \sqrt{21}$$

두 벡터  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ 가 이루는 각의 크기가  $\frac{\pi}{3}$ 이므로

$$\angle A'OB = \angle AOB = \frac{\pi}{3}$$



삼각형 OA'B에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{A'B}^2 = \overline{OA'}^2 + \overline{OB}^2 - 2 \times \overline{OA'} \times \overline{OB} \times \cos \frac{\pi}{3}$$

$$21 = 16 + |\vec{b}|^2 - 2 \times 4 |\vec{b}| \times \frac{1}{2}$$

$$|\vec{b}|^2 - 4|\vec{b}| - 5 = 0, (|\vec{b}| - 5)(|\vec{b}| + 1) = 0$$

$$|\vec{b}| \geq 0 \text{이므로 } |\vec{b}| = 5$$

**5** 원점 O에 대하여 직선 AB의 방향벡터는

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = (4, -1) - (2, 3) = (2, -4)$$

$\vec{n} \perp \overline{AB}$ 이므로

$$\vec{n} \cdot \overline{AB} = (k, 1) \cdot (2, -4) = 2k - 4 = 0$$

따라서  $k = 2$

답 ②

6 점 A(1, 2)를 지나고 방향벡터가  $\vec{u}=(3, 4)$ 인 직선  $l$ 의 방정식은

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4}$$

$$4(x-1) = 3(y-2)$$

$$4x - 3y + 2 = 0$$

한편, 직선  $l$  위의 점 P에 대하여  $|\overline{OP}|$ 의 최솟값은 원점 O와 직선  $l$  사이의 거리와 같다.

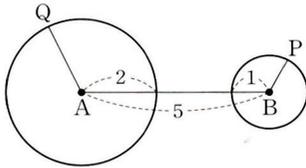
$$\text{따라서 } |\overline{OP}| \text{의 최솟값은 } \frac{|2|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{2}{5}$$

답 ②

7  $|\overline{AB}|=5$ 이므로 선분 AB의 길이는 5이다.

$|\overline{AP}-\overline{AB}|=|\overline{BP}|=1$ 이므로 점 P는 점 B를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 위에 있다.

$\overline{AQ} \cdot \overline{AQ} = |\overline{AQ}|^2 = 4$ 에서  $|\overline{AQ}|=2$ 이므로 점 Q는 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원 위에 있다.



이때

$$PQ \geq \overline{AB} - \overline{PB} - \overline{AQ} = 5 - 1 - 2 = 2$$

(단, 등호는 두 점 P, Q가 선분 AB 위에 있을 때 성립한다.)

이므로  $|\overline{PQ}|$ 의 최솟값은 2이다.

답 ②

8 원점을 O라 하고,  $\vec{a}=\overline{OA}$ ,  $\vec{b}=\overline{OB}$ ,  $\vec{p}=\overline{OP}$ 라 하면

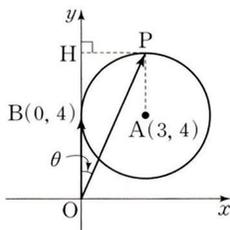
$$|\vec{p}-\vec{a}|=|\vec{a}-\vec{b}| \text{에서}$$

$$|\overline{OP}-\overline{OA}|=|\overline{OA}-\overline{OB}|$$

$$|\overline{AP}|=|\overline{BA}|$$

이때  $|\overline{BA}|=\sqrt{(0-3)^2+(4-4)^2}=3$ 이므로  $|\overline{AP}|=3$

따라서 점 P는 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원 위의 점이다.



두 벡터  $\vec{p}$ ,  $\vec{b}$ 가 이루는 각의 크기를  $\theta$ 라 하면 그림에서  $\theta$ 는 예각이다.

따라서 점 P에서  $y$ 축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\vec{p} \cdot \vec{b} = |\vec{p}| |\vec{b}| \cos \theta$$

$$= \overline{OB} \times \overline{OH} = 4 \times \overline{OH}$$

$$\leq 4 \times (4+3) = 28$$

(단, 등호는 점 P의 좌표가 (3, 7)일 때 성립한다.)

이므로  $\vec{p} \cdot \vec{b}$ 의 최댓값은 28이다.

답 ①

Level

1 기초 연습

본문 64~65쪽

1 ④	2 ⑤	3 ①	4 ②	5 ④
6 ④	7 ④	8 ③		

1  $\vec{a} \cdot \vec{b} = (2, -1) \cdot (3, -2)$

$$= 2 \times 3 + (-1) \times (-2) = 6 + 2 = 8$$

답 ④

2  $\vec{a} + \vec{b} = (x, 2) + (3, 1) = (x+3, 3)$

$$\vec{c} - \vec{b} = (1, x) - (3, 1) = (-2, x-1)$$

두 벡터  $\vec{a} + \vec{b}$ ,  $\vec{c} - \vec{b}$ 가 서로 수직이므로

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = (x+3, 3) \cdot (-2, x-1)$$

$$= (x+3) \times (-2) + 3(x-1)$$

$$= -2x - 6 + 3x - 3$$

$$= x - 9 = 0$$

따라서  $x=9$

답 ⑤

3  $|\vec{a} + 2\vec{b}| = 3$ 이므로

$$|\vec{a} + 2\vec{b}|^2 = (\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b})$$

$$= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot (2\vec{b}) + (2\vec{b}) \cdot \vec{a} + (2\vec{b}) \cdot (2\vec{b})$$

$$= \vec{a} \cdot \vec{a} + 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) + 2(\vec{b} \cdot \vec{a}) + 4(\vec{b} \cdot \vec{b})$$

$$= |\vec{a}|^2 + 4(\vec{a} \cdot \vec{b}) + 4|\vec{b}|^2$$

$$= 1^2 + 4(\vec{a} \cdot \vec{b}) + 4 \times 2^2$$

$$= 17 + 4(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$= 9$$

따라서  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{9-17}{4} = -2$

답 ①

4  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ 이므로  $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$

이때

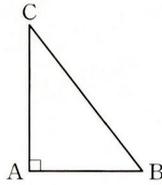
$|\overrightarrow{AB}| = \overline{AB} = 3, |\overrightarrow{BC}| = \overline{BC} = 5$

이므로 직각삼각형 ABC에서

$\overline{AC} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{AB}^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC} = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$



답 ②

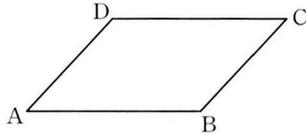
5 평행사변형 ABCD에서

$\overline{AD} = \overline{BC}$ 이므로

$|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AD}| = 3$

따라서

$$\begin{aligned} \overline{AC} \cdot \overline{AD} &= (\overline{AB} + \overline{BC}) \cdot \overline{BC} \\ &= \overline{AB} \cdot \overline{BC} + \overline{BC} \cdot \overline{BC} \\ &= 8 + |\overrightarrow{BC}|^2 \\ &= 8 + 3^2 = 17 \end{aligned}$$



답 ④

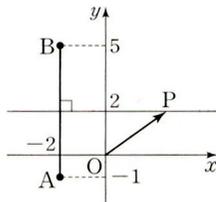
6 원점을 O라 하고,  $\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \vec{b} = \overrightarrow{OB}, \vec{p} = \overrightarrow{OP}$ 라 하면

$|\vec{p} - \vec{a}| = |\vec{p} - \vec{b}|$ 에서

$|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB}|$

즉,  $|\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{BP}|$ 이므로 점 P는 선분 AB의 수직이등분선 위의 점이다.

이때 선분 AB의 중점의 좌표는 (-2, 2)이고 선분 AB는 y축에 평행하므로 점 P는 직선 y=2 위의 점이다.



이때

$\vec{p} \cdot \vec{p} = |\vec{p}|^2 = \overline{OP}^2 \geq 2^2 = 4$

(단, 등호는 점 P의 좌표가 (0, 2)일 때 성립한다.)

이므로  $\vec{p} \cdot \vec{p}$ 의 최솟값은 4이다.

답 ④

7 법선벡터가  $\vec{n} = (3, 4)$ 인 직선의 방향벡터를  $\vec{u} = (a, b)$ 라 하면  $\vec{n} \perp \vec{u}$ 이므로

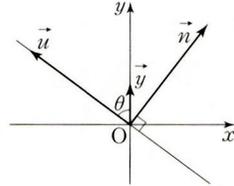
$\vec{n} \cdot \vec{u} = (3, 4) \cdot (a, b) = 3a + 4b = 0$

즉,  $b = -\frac{3}{4}a$ 이므로  $a = -4, b = 3$ 일 때

$\vec{u} = (-4, 3)$

이때 y축의 방향벡터를  $\vec{y} = (0, 1)$ 이라 하면  $\theta$ 는 두 벡터

$\vec{u} = (-4, 3), \vec{y} = (0, 1)$ 이 이루는 예각의 크기와 같다.



따라서

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{|\vec{u} \cdot \vec{y}|}{|\vec{u}| |\vec{y}|} = \frac{|(-4, 3) \cdot (0, 1)|}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2} \sqrt{0^2 + 1^2}} \\ &= \frac{|-4 \times 0 + 3 \times 1|}{5 \times 1} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

답 ④

다른 풀이

y축은 x축과 수직이므로 y축의 법선벡터는  $\vec{x} = (1, 0)$ 으로 놓을 수 있다.

이때 두 직선이 이루는 각의 크기는 두 직선의 법선벡터가 이루는 각의 크기와 같으므로

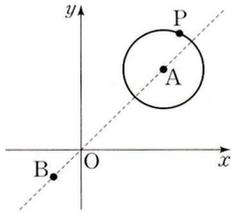
$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{|\vec{n} \cdot \vec{x}|}{|\vec{n}| |\vec{x}|} = \frac{|(3, 4) \cdot (1, 0)|}{\sqrt{3^2 + 4^2} \sqrt{1^2 + 0^2}} \\ &= \frac{|3 \times 1 + 4 \times 0|}{5 \times 1} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

8  $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ 라 하면  $|\vec{a} - \vec{p}| = |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{PA}|$ 이고,

$|\vec{b}| = |(-1, -1)| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$|\vec{a} - \vec{p}| = |\vec{b}|$ 에서  $|\overrightarrow{PA}| = \sqrt{2}$ 이므로 점 P는 점 A(3, 3)

을 중심으로 하고 반지름의 길이가  $\sqrt{2}$ 인 원 위의 점이다.



이때  $|\vec{p}-\vec{b}|=|\vec{OP}-\vec{OB}|=|\vec{BP}|$ 이고,  
 $AB=\sqrt{(-1-3)^2+(-1-3)^2}=4\sqrt{2}$ 이므로  
 $BP\leq AB+AP=4\sqrt{2}+\sqrt{2}=5\sqrt{2}$

(단, 등호는 점 A가 선분 BP 위에 있을 때 성립한다.)  
 따라서  $|\vec{p}-\vec{b}|$ 의 최댓값은  $5\sqrt{2}$ 이다.

답 ③

$$\begin{aligned} \vec{AD} &= \vec{HB} \text{이므로} \\ \vec{AD} \cdot \vec{HN} &= \vec{HB} \cdot \vec{HN} \\ &= \vec{HB} \cdot (\vec{HJ} + \vec{JN}) \\ &= \vec{HB} \cdot \vec{HJ} + \vec{HB} \cdot \vec{JN} \end{aligned} \quad \dots \text{㉠}$$

이때 직각삼각형 HJB에서  
 $\angle HBJ = \frac{1}{2} \angle ABJ = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \pi = \frac{\pi}{3}$

이므로  
 $\vec{HJ} = \vec{BJ} \tan \frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3}$ ,  $\angle JHB = \frac{\pi}{6}$

그러므로  
 $\vec{HB} \cdot \vec{HJ} = |\vec{HB}| |\vec{HJ}| \cos \frac{\pi}{6} = 4 \times 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 12$   
 $\dots \text{㉡}$

또  $\vec{JN} = \vec{AB}$ 이고,  $\angle DAB = \frac{\pi}{3}$ 이므로  
 $\vec{HB} \cdot \vec{JN} = \vec{AD} \cdot \vec{AB}$   
 $= |\vec{AD}| |\vec{AB}| \cos \frac{\pi}{3} = 4 \times 2 \times \frac{1}{2} = 4 \quad \dots \text{㉢}$

㉠, ㉡, ㉢에서

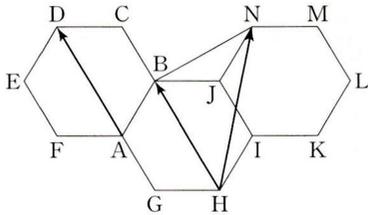
$$\vec{AD} \cdot \vec{HN} = \vec{HB} \cdot \vec{HJ} + \vec{HB} \cdot \vec{JN} = 12 + 4 = 16$$

Level  
**2** 기본 연습

본문 66~67쪽

- |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1 ③ | 2 ④ | 3 ② | 4 ⑤ | 5 ① |
| 6 ③ | 7 ① |     |     |     |

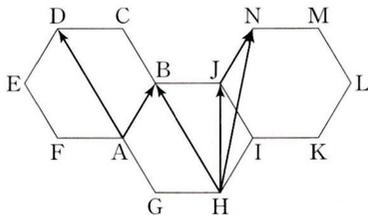
1



$\vec{AD} = \vec{HB}$ 이다.  
 이때  $\vec{BN} \parallel \vec{AJ}$ 이고  $\vec{AJ} \perp \vec{HB}$ 이므로  $\vec{BN} \perp \vec{HB}$   
 따라서 점 N에서 직선 HB에 내린 수선의 발이 점 B이고  
 $HB = 2BJ = 2 \times 2 = 4$ 이므로  
 $\vec{AD} \cdot \vec{HN} = \vec{HB} \cdot \vec{HN} = |\vec{HB}| |\vec{HN}| = 4^2 = 16$

답 ③

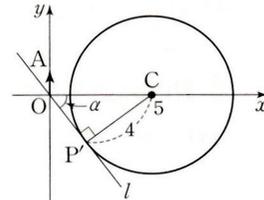
다른 풀이



2 원  $(x-5)^2 + y^2 = 16$ 의 중심을 C라 하면 C(5, 0)이고 반지름의 길이는 4이다.

두 벡터  $\vec{OA}$ ,  $\vec{OP}$ 가 이루는 각의 크기를  $\theta$ 라 하면  
 $\vec{OA} \cdot \vec{OP} = |\vec{OA}| |\vec{OP}| \cos \theta$

에서  $\frac{\vec{OA} \cdot \vec{OP}}{|\vec{OA}| |\vec{OP}|} = \cos \theta$ 이므로  $\frac{\vec{OA} \cdot \vec{OP}}{|\vec{OA}| |\vec{OP}|}$ 의 값이 최  
 소하려면  $\theta$ 가 최대이어야 한다.



$\theta$ 가 최대일 때는 그림과 같이 원점을 지나는 직선 l이 원  $(x-5)^2 + y^2 = 16$ 과 제4사분면에서 접할 때이고, 이때의 접점 P'이다.

$\angle P'OC = \alpha$ 라 하면 직각삼각형  $OP'C$ 에서  
 $\sin \alpha = \frac{CP'}{OC} = \frac{4}{5}$ 이므로

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{4}{3}$$

이때 직선  $l$ 의 기울기는 음수이므로 직선  $l$ 의 방정식은

$$y = -(\tan \alpha)x, \text{ 즉 } y = -\frac{4}{3}x \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

①을 원의 방정식에 대입하면

$$(x-5)^2 + \frac{16}{9}x^2 = 16, \quad 9(x-5)^2 + 16x^2 = 144$$

$$25x^2 - 90x + 225 = 144, \quad 25x^2 - 90x + 81 = 0$$

$$(5x-9)^2 = 0$$

$x = \frac{9}{5}$ 이므로 점  $P'$ 의 좌표는

$$\left(\frac{9}{5}, -\frac{4}{3} \times \frac{9}{5}\right), \text{ 즉 } \left(\frac{9}{5}, -\frac{12}{5}\right)$$

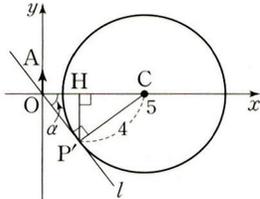
따라서

$$\begin{aligned} \overline{AP'} \cdot \overline{AP'} &= |\overline{AP'}|^2 = \left(\frac{9}{5} - 0\right)^2 + \left(-\frac{12}{5} - 1\right)^2 \\ &= \frac{81}{25} + \frac{289}{25} = \frac{370}{25} = \frac{74}{5} \end{aligned}$$

답 ④

**참고1**

위 풀이에서 점  $P'$ 의 좌표를 다음과 같이 구할 수도 있다.



직각삼각형  $OP'C$ 에서  $\overline{OP'} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$

점  $P'$ 에서  $x$ 축에 내린 수선의 발을  $H$ 라 하면 두 직각삼각형  $OP'H, OCP'$ 은 서로 닮은 도형이므로

$$\overline{OH} : \overline{HP'} : \overline{OP'} = 3 : 4 : 5 \text{에서}$$

$$\overline{OH} : \overline{HP'} : 3 = 3 : 4 : 5$$

$$\overline{OH} = 3 \times \frac{3}{5} = \frac{9}{5}, \quad \overline{HP'} = 3 \times \frac{4}{5} = \frac{12}{5}$$

따라서 제4사분면의 점  $P'$ 의 좌표는

$$(\overline{OH}, -\overline{HP'}), \text{ 즉 } \left(\frac{9}{5}, -\frac{12}{5}\right)$$

**참고2**

위 풀이에서  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ 이므로

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$$

이때  $\overline{OP'} = \overline{OC} \times \cos \alpha = 5 \times \frac{3}{5} = 3$ 이고,

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \alpha \text{이므로}$$

$$\cos \theta = \cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha = -\frac{4}{5}$$

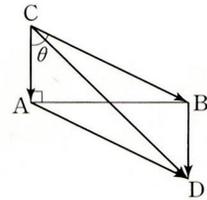
그러므로

$$\begin{aligned} \overline{OA} \cdot \overline{OP'} &= |\overline{OA}| |\overline{OP'}| \cos \theta \\ &= 1 \times 3 \times \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{12}{5} \end{aligned}$$

한편,  $\overline{AP'} = \overline{OP'} - \overline{OA}$ 이므로

$$\begin{aligned} |\overline{AP'}|^2 &= |\overline{OA} - \overline{OP'}|^2 \\ &= (\overline{OA} - \overline{OP'}) \cdot (\overline{OA} - \overline{OP'}) \\ &= \overline{OA} \cdot \overline{OA} - 2\overline{OA} \cdot \overline{OP'} + \overline{OP'} \cdot \overline{OP'} \\ &= |\overline{OA}|^2 - 2(\overline{OA} \cdot \overline{OP'}) + |\overline{OP'}|^2 \\ &= 1^2 - 2 \times \left(-\frac{12}{5}\right) + 3^2 = \frac{74}{5} \end{aligned}$$

3  $\overline{CA} + \overline{CB} = \overline{CD}$ 이므로 사각형  $ADBC$ 는 평행사변형이다.



두 벡터  $\overline{CA}, \overline{CB}$ 가 이루는 각의 크기를  $\theta$ 라 하면  $\theta = \angle BCA$ 이므로

$$\overline{CA} \cdot \overline{CB} = |\overline{CA}| |\overline{CB}| \cos \theta = \overline{CA} \times \overline{CA}$$

$$\overline{BD} = \overline{CA} \text{이므로 } |\overline{BD}| = |\overline{CA}| \cdot \overline{CB} \text{에서}$$

$$\overline{CA} = \overline{CA} \times \overline{CA}$$

$$\text{즉, } \overline{CA} = 1$$

직각삼각형  $ABC$ 에서  $\overline{BC} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{CB} \cdot \overline{CD} &= \overline{CB} \cdot (\overline{CA} + \overline{CB}) \\ &= \overline{CB} \cdot \overline{CA} + \overline{CB} \cdot \overline{CB} \\ &= |\overline{CA}|^2 + |\overline{CB}|^2 \\ &= 1^2 + (\sqrt{5})^2 = 6 \end{aligned}$$

답 ②

4 점  $A(2, 1)$ 을 지나고 법선벡터가  $\vec{n} = (1, 2)$ 인 직선  $l$ 의 방정식은

$$1 \times (x-2) + 2(y-1) = 0, \text{ 즉 } x + 2y - 4 = 0$$

$\overline{BP} \cdot \overline{BP} = |\overline{BP}|^2 = k$ , 즉  $|\overline{BP}| = \sqrt{k}$ 를 만족시키는 점  $P$ 가 나타내는 도형  $C$ 는 중심이  $B$ 이고 반지름의 길이가  $\sqrt{k}$ 인 원이므로 원  $C$ 의 방정식은

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 = k$$

이때 직선  $l$ 이 원  $C$ 와 오직 한 점에서 만나므로 접해야 한다.  
즉, 원  $C$ 의 중심  $B(3, -1)$ 과 직선  $x+2y-4=0$  사이의 거리는 원  $C$ 의 반지름의 길이인  $\sqrt{k}$ 와 같아야 한다.

따라서  $\sqrt{k} = \frac{|3+2 \times (-1)-4|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$  이므로

$$k = \left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{9}{5}$$

㉔ ⑤

5 점  $P$ 를 지나고 직선  $AB$ 에 수직인 직선이 직선  $AB$ 와 만나 는 점을  $H$ 라 하자.

점  $P$ 가 점  $A$ 와 일치하면  $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

점  $P$ 가 점  $A$ 와 일치하지 않을 때, 두 벡터  $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}$ 가 이루는 각의 크기를  $\theta$ 라 하면

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} = (|\overrightarrow{AP}| \cos \theta) |\overrightarrow{AB}|$$

$$= \begin{cases} |\overrightarrow{AH}| & (0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}) \\ 0 & (\theta = \frac{\pi}{2}) \\ -|\overrightarrow{AH}| & (\frac{\pi}{2} < \theta < \pi) \end{cases}$$

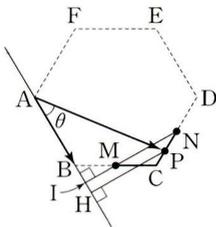
$k \leq 0$ 이면  $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} \geq k$ 를 만족시키는 점  $P$ 가 나타내는 도형은 선분  $AB, BC, CD, DE$ 를 모두 포함하게 된다. 이때 점  $P$ 가 나타내는 도형의 길이는 4 이상이 되어 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로  $k > 0$ , 즉  $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ 이어야 하고, 이때

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AH}| \geq k$$

를 만족시키는 점  $P$ 가 나타내는 도형의 길이가 1이어야 한다.

..... ㉕



한편, 두 선분  $BC, CD$ 의 중점을 각각  $M, N$ 이라 하고, 점  $N$ 에서 직선  $AB$ 에 내린 수선의 발을  $I$ 라 하면 점  $M$ 은 선분  $NI$  위에 있고,  $\overline{CM} + \overline{CN} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ 이므로 ㉕를 만족시키려면 점  $P$ 는 선분  $CM$  또는 선분  $CN$  위에 있어야 한다.  
따라서  $k = \overline{AI}$ 이고

$$\overline{AI} = \overline{AB} + \overline{BI} = 1 + \overline{BM} \cos \frac{\pi}{3} = 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$$

이므로  $k = \frac{5}{4}$

㉔ ①

6  $\overrightarrow{PF} + 4\overrightarrow{QF} = \vec{0}$ 에서  $\overrightarrow{PF} = -4\overrightarrow{QF}$ 이므로 점  $F$ 는 선분  $PQ$ 를 4 : 1로 내분하는 점이다.

즉,  $\overline{PF} : \overline{FQ} = 4 : 1$ 이므로

$$\overline{FQ} = k, \overline{PF} = 4k \quad (k \text{는 양의 상수})$$

로 놓을 수 있다.

타원  $E$ 의 장축의 길이는 12이므로 타원의 정의에 의하여

$$\overline{PF'} = 12 - 4k, \overline{F'Q} = 12 - k$$

이때  $|\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{F'Q}|$ 에서

$$4k + k = 12 - k$$

즉,  $k = 2$ 이므로

$$\overline{PF'} = 4, \overline{PF} = 8, \overline{FQ} = 2, \overline{F'Q} = 10$$

이등변삼각형  $PF'Q$ 에서  $\angle QPF' = \theta$ 라 하고, 선분  $PF'$ 의 중점을  $M$ 이라 하면  $\angle PMQ = \frac{\pi}{2}$ 이므로

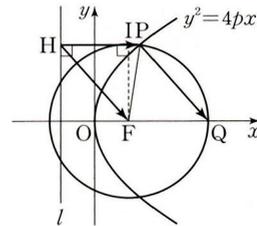
$$\cos \theta = \frac{\overline{PM}}{\overline{PQ}} = \frac{\frac{1}{2} \times 4}{10} = \frac{1}{5}$$

따라서

$$\overrightarrow{PF} \cdot \overrightarrow{PF'} = |\overrightarrow{PF}| |\overrightarrow{PF'}| \cos \theta = 8 \times 4 \times \frac{1}{5} = \frac{32}{5}$$

㉔ ③

7



두 점  $P, Q$ 는 중심이  $F$ 이고 반지름의 길이가 7인 원 위에 있으므로  $\overline{PF} = \overline{QF} = 7$  ..... ㉖

포물선의 정의에 의하여  $\overline{PF} = \overline{PH}$  ..... ㉗

㉖, ㉗에서  $\overline{QF} = \overline{PH}$ 이고 두 직선  $QF, PH$ 는 서로 평행하므로 사각형  $FQPH$ 는 평행사변형이고, 이때  $\overrightarrow{HF} = \overrightarrow{PQ}$  ..... ㉘

㉘에서  $\overrightarrow{HP} \cdot \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{HP} \cdot \overrightarrow{HF} = 42$

두 벡터  $\overrightarrow{HP}, \overrightarrow{HF}$ 가 이루는 각의 크기를  $\theta$ 라 하고, 점  $F$ 에서 직선  $HP$ 에 내린 수선의 발을  $I$ 라 하면

$$\begin{aligned} \overrightarrow{HP} \cdot \overrightarrow{HF} &= |\overrightarrow{HP}| |\overrightarrow{HF}| \cos \theta \\ &= |\overrightarrow{HP}| |\overrightarrow{HI}| = 7 |\overrightarrow{HI}| = 42 \end{aligned}$$

에서  $|\overrightarrow{HI}| = 6$

이때 원점 O에 대하여  $\overrightarrow{HI} = 2\overrightarrow{OF} = 6$ ,

$\overrightarrow{IP} = \overrightarrow{HP} - \overrightarrow{HI} = 7 - 6 = 1$ 이므로 직각삼각형 IFP에서

$$\overrightarrow{FI} = \sqrt{\overrightarrow{FP}^2 - \overrightarrow{IP}^2} = \sqrt{49 - 1} = 4\sqrt{3}$$

이고, 직각삼각형 HFI에서

$$\overrightarrow{HF} = \sqrt{\overrightarrow{FI}^2 + \overrightarrow{HI}^2} = \sqrt{48 + 36} = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$$

따라서  $|\overrightarrow{FP} - \overrightarrow{FQ}| = |\overrightarrow{QP}| = |\overrightarrow{FH}| = 2\sqrt{21}$

답 ①

Level

3

실력 완성

본문 68~69쪽

1 ①      2 20      3 ②      4 ⑤      5 ①

- 1 원의 중심을 원점 O로 하고 직선 UR을  $x$ 축으로 하는 좌표 평면을 설정하면 네 점 A, B, Q, S의 좌표는 각각  $(-\sqrt{3}, -1), (\sqrt{3}, -1), (1, -\sqrt{3}), (1, \sqrt{3})$

이므로

$$\overrightarrow{QA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OQ} = (-\sqrt{3}-1, -1+\sqrt{3}),$$

$$\overrightarrow{BS} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OB} = (1-\sqrt{3}, \sqrt{3}+1)$$

따라서

$$\begin{aligned} \overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{BS} &= (-\sqrt{3}-1, -1+\sqrt{3}) \cdot (1-\sqrt{3}, \sqrt{3}+1) \\ &= (-\sqrt{3}-1)(1-\sqrt{3}) + (-1+\sqrt{3})(\sqrt{3}+1) \\ &= \{(-\sqrt{3})^2 - 1^2\} + \{(\sqrt{3})^2 - 1^2\} \\ &= 2 + 2 = 4 \end{aligned}$$

답 ①

다른 풀이 1

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{QS} = 0 \text{에서 } \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{QS} \quad \dots \text{㉠}$$

$$\text{선분 PS는 원의 지름이므로 } \overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{QS} \quad \dots \text{㉡}$$

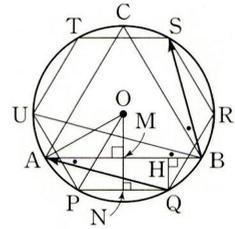
㉠, ㉡에서  $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{PQ}$

마찬가지로  $\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{RS}, \overrightarrow{CA} \parallel \overrightarrow{TU}$

정삼각형 ABC와 정육각형 PQRSTU가 이와 같은 조건을 만족시키려면 세 점 A, B, C는 각각 세 호 UP, QR, ST를 이등분하는 점이고, 세 호 QB, SC, UA의 길이가 서로 같으므로 원주각의 크기도 서로 같다. 즉,

$$\angle QAB = \angle SBC = \angle UBA = \frac{\pi}{12} \quad \dots \text{㉢}$$

이므로 엇각의 성질에 의하여 두 직선 AQ, UB는 서로 평행하고, 두 벡터  $\overrightarrow{QA}, \overrightarrow{BS}$ 가 이루는 각의 크기는 두 벡터  $\overrightarrow{BU}, \overrightarrow{BS}$ 가 이루는 각의 크기와 같다.



㉢에서  $\angle SBU = \angle CBA = \frac{\pi}{3}$ 이므로 두 벡터  $\overrightarrow{QA}, \overrightarrow{BS}$ 가 이루는 각의 크기도  $\frac{\pi}{3}$ 이다.

한편, 원의 중심을 O라 하고, 점 O에서 두 선분 AB, PQ에 내린 수선의 발을 각각 M, N이라 하면 두 점 M, N은 각각 두 선분 AB, PQ의 중점이다.

$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OP} = 2$ 이고,  $\angle AOM = \angle NPO = \frac{\pi}{3}$ 이므로 서로 합동인 두 직각삼각형 OAM, PON에서

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA} \sin \frac{\pi}{3} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{OA} \cos \frac{\pi}{3} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

점 Q에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{NQ} = \overrightarrow{PN} = 1 \text{이므로}$$

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MH} = \sqrt{3} + 1$$

$$\overrightarrow{QH} = \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \sqrt{3} - 1$$

그러므로 직각삼각형 AQH에서

$$\overrightarrow{AQ} = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2 + (\sqrt{3}-1)^2} = 2\sqrt{2}$$

한편, 두 삼각형 AQB, BSC는 서로 합동이므로

$$\overrightarrow{BS} = \overrightarrow{AQ} = 2\sqrt{2}$$

따라서

$$\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{BS} = |\overrightarrow{QA}| |\overrightarrow{BS}| \cos \frac{\pi}{3} = 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{1}{2} = 4$$

다른 풀이 2

원의 중심을 O라 하면 점 O는 정삼각형 ABC의 무게중심

이므로  $\angle AOB = \frac{1}{3} \times 2\pi = \frac{2}{3}\pi$

정육각형 PQRSTU에서 두 삼각형 OQR, ORS는 모두

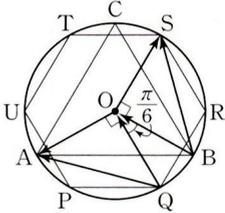
정삼각형이므로  $\angle QOR = \angle ROS = \frac{\pi}{3}$

이때 직선 OB는  $\angle QOR$ 의 이등분선이므로

$$\angle QOB = \angle BOR = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

그러므로

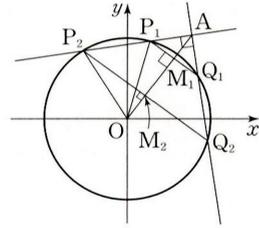
$$\begin{aligned} \angle BOS &= \angle BOR + \angle ROS = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \\ \angle AOQ &= \angle AOB - \angle QOB = \frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \\ \angle AOS &= 2\pi - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{5}{6}\pi \end{aligned}$$



따라서

$$\begin{aligned} \overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{BS} &= (\overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OS}) \\ &= \overrightarrow{QO} \cdot \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{QO} \cdot \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OS} \\ &= |\overrightarrow{QO}| |\overrightarrow{BO}| \cos \frac{\pi}{6} + |\overrightarrow{QO}| |\overrightarrow{OS}| \cos \left(\pi - \frac{2}{3}\pi\right) \\ &\quad + |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{BO}| \cos \left(\pi - \frac{2}{3}\pi\right) \\ &\quad + |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OS}| \cos \frac{5}{6}\pi \\ &= 2 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \times 2 \times \frac{1}{2} + 2 \times 2 \times \frac{1}{2} \\ &\quad + 2 \times 2 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= 4 \end{aligned}$$

- 2  $m_1 < m_2$ 라고 가정해도 일반성을 잃지 않는다.  
 원  $x^2 + y^2 = 15$ 의 중심은 원점 O이고, 반지름의 길이는  $\sqrt{15}$ 이다.  
 이때  $\overrightarrow{OA} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ 이고,  $5 > \sqrt{15}$ 이므로 점 A는 원  $x^2 + y^2 = 15$ 의 외부에 있다.  
 한편,  $|\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{AQ}|$ 이고,  $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = 0$ 에서  $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{AQ}$   
 이므로 삼각형 APQ는  $\angle PAQ = \frac{\pi}{2}$ 인 직각이등변삼각형이다.  
 이때 선분 PQ의 중점을 M이라 하면  
 $|\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ}| = |2\overrightarrow{AM}| = 2|\overrightarrow{AM}|$   
 그런데 주어진 조건에서  $|\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ}|$ 의 값은 두 개이므로 삼각형 APQ가  $\angle PAQ = \frac{\pi}{2}$ 인 직각이등변삼각형이 되도록 하는 두 점 P, Q의 순서쌍은 그림과 같이  $(P_1, Q_1)$ ,  $(P_2, Q_2)$ 의 2개가 존재한다.



선분  $P_1Q_1$ 의 중점을  $M_1$ , 선분  $P_2Q_2$ 의 중점을  $M_2$ 라 하고,  
 $\overrightarrow{AM_1} = a$ ,  $\overrightarrow{AM_2} = b$ 라 하면

$$P_1M_1 = a, OM_1 = 5 - a, P_2M_2 = b, OM_2 = 5 - b$$

이므로 직각삼각형  $OM_1P_1$ 에서

$$(\sqrt{15})^2 = (5 - a)^2 + a^2, 2a^2 - 10a + 10 = 0$$

$$a^2 - 5a + 5 = 0 \quad \text{..... ㉠}$$

마찬가지로 직각삼각형  $OM_2P_2$ 에서

$$b^2 - 5b + 5 = 0 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡에서  $a, b$ 는 이차방정식  $x^2 - 5x + 5 = 0$ 의 두 실근이고,  $a < b$ 이다.

$$\text{즉, } a = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}, b = \frac{5 + \sqrt{5}}{2} \text{ 이므로}$$

$$m_1 = |\overrightarrow{AP_1} + \overrightarrow{AQ_1}| = 2|\overrightarrow{AM_1}| = 2a = 5 - \sqrt{5}$$

$$m_2 = |\overrightarrow{AP_2} + \overrightarrow{AQ_2}| = 2|\overrightarrow{AM_2}| = 2b = 5 + \sqrt{5}$$

$$\text{따라서 } m_1 \times m_2 = (5 - \sqrt{5})(5 + \sqrt{5}) = 25 - 5 = 20$$

답 20

**참고**

두 점  $P_1, Q_1$ 의 위치가 서로 바뀌거나, 두 점  $P_2, Q_2$ 의 위치가 서로 바뀌는 경우도 가능하고, 이 경우에도  $m_1 \times m_2 = 20$ 이다.

- 3 선분 AB의 중점을 M이라 하면  $M(2, 1)$ 이고,  
 $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB} = \sqrt{2}$ 이다.

한편,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} &= (\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MA}) \cdot (\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MB}) \\ &= \overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} \\ &= |\overrightarrow{PM}|^2 + \overrightarrow{PM} \cdot (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA}) + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} \end{aligned}$$

이고,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} &= \vec{0} \\ \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= |\overrightarrow{MA}| |\overrightarrow{MB}| \cos \pi \\ &= \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times (-1) = -2 \end{aligned}$$

이므로

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = |\overrightarrow{PM}|^2 - 2 \quad \text{..... ㉠}$$

$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 의 최솟값이 0이므로 ㉠에서  $|\overrightarrow{PM}|^2$ 의 최솟값은 2이어야 한다.

원 C의 중심을 C라 하면  $C(4, 3)$ 이므로

$$CM = \sqrt{(2-4)^2 + (1-3)^2} = 2\sqrt{2}$$

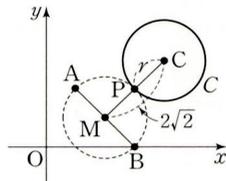
원 C의 반지름의 길이는  $r$ 이므로 원 C 위의 임의의 점 P에 대하여

$$|\overline{CM} - r| \leq \overline{PM} \leq \overline{CM} + r$$

$$\text{즉, } |2\sqrt{2} - r| \leq \overline{PM} \leq 2\sqrt{2} + r \quad \dots\dots \text{㉡}$$

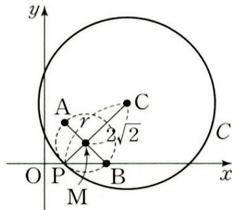
㉡에서  $|2\sqrt{2} - r| \leq \overline{PM}$ 의 등호가 성립할 때,  $|\overrightarrow{PM}|$ 은 최솟값을 갖고,  $|\overrightarrow{PM}|^2$ 의 최솟값은 2이므로  $|\overrightarrow{PM}|$ 의 최솟값은  $\sqrt{2}$ 이다.

(i) 점 P가 선분 CM 위에 있을 때



$$2\sqrt{2} - r = \sqrt{2} \text{에서 } r = \sqrt{2}$$

(ii) 점 M이 선분 CP 위에 있을 때



$$r - 2\sqrt{2} = \sqrt{2} \text{에서 } r = 3\sqrt{2}$$

(i), (ii)에서  $|\overrightarrow{PM}|$ 의 최솟값이  $\sqrt{2}$ 가 되도록 하는 모든 양수  $r$ 의 값의 곱은

$$\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 6$$

답 ②

**참고**

$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 의 최솟값이 0인 경우는 위의 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 원이 원 C와 한 점에서 만날 때이다.

4  $|\overrightarrow{OA}| = 3$ ,  $|\overrightarrow{OB}| = 4$ 이므로 두 벡터  $\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OB}$ 가 이루는 각의 크기를  $\theta$ 라 하면

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}| \cos \theta = 3 \times 4 \times \cos \theta = 12 \cos \theta$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 6 \text{이므로 } 12 \cos \theta = 6 \text{에서}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2}$$

점 O를 원점으로 하고 반직선 OB를  $x$ 축의 양의 방향으로 하는 좌표축을 설정하자.

$|\overrightarrow{OB}| = 4$ 이므로 점 B의 좌표는  $(4, 0)$ 이다.

$|\overrightarrow{OA}| = 3$ 이고  $\cos \theta = \frac{1}{2}$ 이므로 점 A의 좌표는  $(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$

이고,  $\overrightarrow{OQ} = \frac{2}{3} \overrightarrow{OA}$ 이므로 점 Q의 좌표는  $(1, \sqrt{3})$ 이다.

이때 직선 AP의 방정식은  $x = \frac{3}{2}$ 이고 직선 BQ의 방정식은

$$y - 0 = \frac{0 - \sqrt{3}}{4 - 1}(x - 4), \text{ 즉 } y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x - 4)$$

이므로 두 직선 AP, BQ의 교점 R의 좌표는  $(\frac{3}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{6})$

이다.

$$\overrightarrow{OR} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB} \text{에서}$$

$$(\frac{3}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{6}) = m(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}) + n(4, 0)$$

이므로

$$\frac{3}{2} = \frac{3}{2}m + 4n \text{이고 } \frac{5\sqrt{3}}{6} = \frac{3\sqrt{3}}{2}m$$

따라서  $m = \frac{5}{9}$ ,  $n = \frac{1}{6}$ 이므로

$$m + n = \frac{5}{9} + \frac{1}{6} = \frac{13}{18}$$

답 ⑤

**다른 풀이**

$|\overrightarrow{OA}| = 3$ ,  $|\overrightarrow{OB}| = 4$ 이므로 두 벡터  $\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OB}$ 가 이루는 각의 크기를  $\theta$ 라 하면

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}| \cos \theta = 3 \times 4 \times \cos \theta = 12 \cos \theta$$

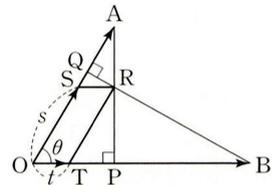
$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 6 \text{이므로 } 12 \cos \theta = 6 \text{에서}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2}$$

이때 두 직각삼각형 AOP, BQO에서

$$|\overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{OA}| \cos \theta = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$|\overrightarrow{OQ}| = |\overrightarrow{OB}| \cos \theta = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$



그림과 같이 점 R을 지나고 두 직선 OB, OA와 평행한 직선이 두 선분 OA, OB와 만나는 점을 각각 S, T라 하고,  $\overline{OS} = s$ ,  $\overline{OT} = t$ 라 하면

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{OT} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때

$$\overrightarrow{OS} = \frac{|\overrightarrow{OS}|}{|\overrightarrow{OA}|} \overrightarrow{OA} = \frac{s}{3} \overrightarrow{OA},$$

$$\overrightarrow{OT} = \frac{|\overrightarrow{OT}|}{|\overrightarrow{OB}|} \overrightarrow{OB} = \frac{t}{4} \overrightarrow{OB}$$

이므로 ①에서

$$\overrightarrow{OR} = \frac{s}{3} \overrightarrow{OA} + \frac{t}{4} \overrightarrow{OB} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

한편,  $QS=2-s$ ,  $TP=\frac{3}{2}-t$ 이고 두 직각삼각형 RQS,

RTP에서

$$\cos(\angle QSR) = \cos(\angle RTP) = \cos\theta = \frac{1}{2}$$

이므로

$$\overline{SR} = 2\overline{QS} = 4-2s, \quad \overline{TR} = 2\overline{TP} = 3-2t \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

이때 평행사변형 OTRS에서  $\overline{SR}=t$ ,  $\overline{TR}=s$ 이므로 ③에서

$$4-2s=t \text{ 이고 } 3-2t=s$$

$t=4-2s$ 를  $s=3-2t$ 에 대입하여 정리하면

$$s=3-2(4-2s) = -5+4s$$

$$s = \frac{5}{3}, \quad t = 4 - 2 \times \frac{5}{3} = \frac{2}{3}$$

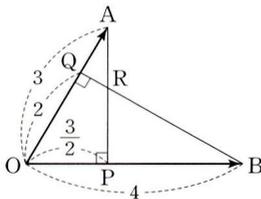
$$\textcircled{2} \text{에서 } \overrightarrow{OR} = \frac{5}{9} \overrightarrow{OA} + \frac{1}{6} \overrightarrow{OB}$$

따라서  $m = \frac{5}{9}$ ,  $n = \frac{1}{6}$ 이므로

$$m+n = \frac{5}{9} + \frac{1}{6} = \frac{13}{18}$$

**참고**

주어진 조건에서 주어진 그림은 다음과 같다.



$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OR} = |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OQ}| = 3 \times 2 = 6$$

$$\begin{aligned} \text{이때 } \overrightarrow{OA} \cdot (m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}) &= m|\overrightarrow{OA}|^2 + n\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \\ &= 9m + 6n = 6 \quad \dots\dots \textcircled{4} \end{aligned}$$

$$\text{마찬가지로 } \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OR} = |\overrightarrow{OB}| |\overrightarrow{OP}| = 4 \times \frac{3}{2} = 6 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OB} \cdot (m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}) &= m\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} + n|\overrightarrow{OB}|^2 \\ &= 6m + 16n = 6 \quad \dots\dots \textcircled{5} \end{aligned}$$

④, ⑤을 연립하면

$$m = \frac{5}{9}, \quad n = \frac{1}{6}$$

5 선분 BP의 중점을 P'이라 하면  $\frac{1}{2}\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BP'}$ 이므로

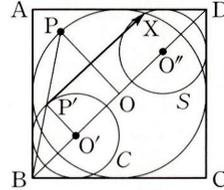
$$\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BP} + k(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) \text{에서}$$

$$\overrightarrow{AX} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BP'} + k\overrightarrow{BD}$$

$$\overrightarrow{BX} - \overrightarrow{BP'} = k\overrightarrow{BD}$$

$$\overrightarrow{P'X} = k\overrightarrow{BD} \quad \dots\dots \textcircled{6}$$

선분 BD의 중점을 O, 선분 BO의 중점을 O'이라 하자.



점 P가 선분 BD 위에 있지 않을 때 두 삼각형 BPO와 BP'O'은 닮음비가 2 : 1인 서로 닮은 도형이므로

$$\overline{O'P'} = \frac{1}{2} \overline{OP} = \frac{1}{2} \times 2 = 1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

한편, 점 P가 선분 BD 위에 있을 때도 ④이 성립한다.

그러므로 점 P'은 점 O'을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 C 위의 점이다.

⑥에서 점 X는 점 P'을 지나고 직선 BD와 평행한 직선 위의 점이므로 점 X가 나타내는 도형은 원 C를 벡터  $\overrightarrow{BD}$ 의 방향으로 평행이동한 원 S이다.

이때 원 S 위의 모든 점이 정사각형 ABCD의 둘레 또는 그 내부에 있도록 하는 실수 k가 최대인 경우는 그림과 같이 원 S가 두 선분 AD와 CD에 동시에 접하게 될 때이다.

이때의 원 S의 중심을 O''이라 하면 실수 k의 최댓값은

$$K = \frac{|\overrightarrow{O'O''}|}{|\overrightarrow{BD}|}$$

그런데  $\overrightarrow{BO'} = \overrightarrow{O'O} = \overrightarrow{OO''} = \overrightarrow{O''D}$ 이므로

$$\overrightarrow{O'O''} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BD} \text{에서 } K = \frac{|\overrightarrow{O'O''}|}{|\overrightarrow{BD}|} = \frac{1}{2}$$

이때

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AX} \cdot \overrightarrow{CX} &= \overrightarrow{XA} \cdot \overrightarrow{XC} \\ &= (\overrightarrow{XO} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{XO} + \overrightarrow{OC}) \\ &= |\overrightarrow{XO}|^2 + \overrightarrow{XO} \cdot (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}) + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} \\ &= |\overrightarrow{XO}|^2 + 0 - |\overrightarrow{OA}|^2 \\ &= |\overrightarrow{XO}|^2 - (2\sqrt{2})^2 \end{aligned}$$

이고,

$$|\overrightarrow{XO}| \leq \overline{OO''} + 1 = \sqrt{2} + 1$$

(단, 등호는 점 O''이 선분 OX 위에 있을 때 성립한다.)

이므로

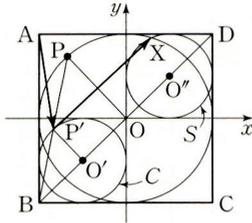
$$\overrightarrow{AX} \cdot \overrightarrow{CX} \leq (\sqrt{2} + 1)^2 - 8 = 2\sqrt{2} - 5$$

따라서  $\overrightarrow{AX} \cdot \overrightarrow{CX}$ 의 최댓값은  $2\sqrt{2}-5$ 이다.

답 ①

참고

그림과 같이 점 O를 원점으로 하고 x축이 직선 BC와 평행하도록 좌표축을 설정하자.



점 X의 좌표를  $(a, b)$ 라 하면 두 점 A, C의 좌표는 각각  $(-2, 2), (2, -2)$ 이므로

$$\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OA} = (a, b) - (-2, 2) = (a+2, b-2),$$

$$\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OC} = (a, b) - (2, -2) = (a-2, b+2)$$

이고,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AX} \cdot \overrightarrow{CX} &= (a+2, b-2) \cdot (a-2, b+2) \\ &= (a^2-4) + (b^2-4) = a^2+b^2-8 \end{aligned}$$

한편, 점  $O''$ 의 좌표는  $(1, 1)$ 이므로 점  $X(a, b)$ 는

원  $S: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$  위에 있고,

$$\sqrt{a^2+b^2} = \overline{OX} \leq \overline{OO''} + 1 = \sqrt{2} + 1$$

(단, 등호는 점  $O''$ 이 선분  $OX$  위에 있을 때 성립한다.)

따라서  $a^2+b^2$ 의 최댓값이  $(\sqrt{2}+1)^2 = 3+2\sqrt{2}$ 이므로

$\overrightarrow{AX} \cdot \overrightarrow{CX}$ 의 최댓값은

$$(\sqrt{2}+1)^2 - 8 = 2\sqrt{2} - 5$$

# 06 공간도형

유제

본문 73~81쪽

- 1 ②
- 2 6
- 3 ⑤
- 4 ⑤
- 5 ④
- 6 ②

- 1 직선 AB와 평행한 직선은 직선 DE, 직선 GH, 직선 JK 이므로  $a=3$   
 직선 AB와 꼬인 위치에 있는 직선은 직선 CI, 직선 DJ, 직선 EK, 직선 FL, 직선 HI, 직선 IJ, 직선 KL, 직선 LG 이므로  $b=8$   
 따라서  $2a+b=2 \times 3+8=14$

답 ②

참고

6개의 점 A, B, C, D, E, F는 모두 한 평면 위에 있으므로 직선 AB와 평행하지 않고 평면 ABCDEF 위에 있는 직선 BC, 직선 CD, 직선 EF, 직선 FA는 모두 직선 AB와 한 점에서 만난다. 또 4개의 점 A, B, H, G는 모두 한 평면 위에 있으므로 직선 AB와 평행하지 않고 평면 ABHG 위에 있는 직선 AG, 직선 BH는 모두 직선 AB와 한 점에서 만난다. 따라서 정육각기둥 ABCDEF-GHIJKL의 모든 모서리를 연장한 직선 중에서 직선 AB와 한 점에서 만나는 직선의 개수는 6이다.

이때 직선 AB와 평행한 직선의 개수는 3이고, 정육각기둥 ABCDEF-GHIJKL의 모든 모서리를 연장한 직선의 개수는 18이므로 직선 AB와 꼬인 위치에 있는 직선의 개수는  $18-1-6-3=8$

- 2 정사각뿔 E-ABCD의 모든 모서리의 길이가 같고 사면체 F-ABE가 정사면체이므로  $\overline{EF} = \overline{AD}, \overline{AF} = \overline{DE}$   
 이때  $\overline{AD} \parallel \overline{EF}$ 이므로 사각형 ADEF는 평행사변형이다. 마찬가지로 사각형 FBCE도 평행사변형이다. 즉, 직선 EF와 평행한 직선은  
 직선 AD, 직선 BC이므로  $a=2$   
 또 직선 AF와 꼬인 위치에 있는 직선은 직선 BE, 직선 BC, 직선 CD, 직선 CE이므로  $b=4$   
 따라서  $a+b=2+4=6$

답 6

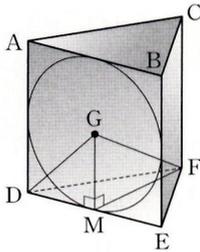
**참고**

직선 AB, 직선 AD, 직선 AE, 직선 BF, 직선 EF는 직선 AF와 한 점에서 만나고, 직선 DE는 직선 AF와 평행하다.

**3** 세 옆면이 모두 정사각형이므로

$$\overline{AD} \perp \overline{DF}, \overline{AD} \perp \overline{DE}$$

따라서 직선 AD는 평면 DEF와 수직이다.



이때 선분 DE의 중점을 M이라 하면 직선 GM은 직선 AD와 평행하므로 직선 GM은 평면 DEF와 수직이다. 즉, 점 G에서 평면 DEF에 내린 수선의 발은 점 M과 일치한다.

$$\overline{AB} = 2a \quad (a > 0) \text{이라 하면}$$

$$\overline{GM} = \frac{1}{2} \overline{AB} = a, \quad \overline{FM} = \frac{\sqrt{3}}{2} \overline{AB} = \sqrt{3}a$$

이므로 직각삼각형 GMF에서

$$\overline{GF} = \sqrt{\overline{GM}^2 + \overline{FM}^2} = 2a$$

직선 GF와 평면 DEF가 이루는 각의 크기  $\alpha$ 는

$$\alpha = \angle \text{GFM} \text{이므로}$$

$$\sin \alpha = \sin(\angle \text{GFM}) = \frac{\overline{GM}}{\overline{GF}} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

한편, 사각형 ADFC가 정사각형이므로 두 직선 AC, DF는 평행하고 두 직선 AC, GF가 이루는 각의 크기  $\beta$ 는 두 직선 DF, GF가 이루는 각의 크기와 같으므로  $\beta = \angle \text{GFD}$  이고

$$\overline{DG} = \frac{1}{2} \overline{BD} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \overline{AB} = \sqrt{2}a$$

삼각형 GDF에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos \beta = \cos(\angle \text{GFD})$$

$$= \frac{\overline{GF}^2 + \overline{DF}^2 - \overline{DG}^2}{2 \times \overline{GF} \times \overline{DF}} = \frac{(2a)^2 + (2a)^2 - (\sqrt{2}a)^2}{2 \times 2a \times 2a}$$

$$= \frac{6a^2}{8a^2} = \frac{3}{4}$$

$$\text{따라서 } \sin \alpha + \cos \beta = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$

답 ⑤

**4** 직각삼각형 ABC에서  $\overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2} = 5$ 이고 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BC} = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$$

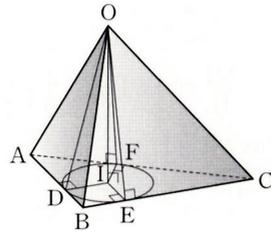
이때 삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를  $r$ 이라 하면 삼각형 ABC의 넓이는 세 삼각형 ABI, BCI, CAI의 넓이의 합과 같으므로

$$6 = \frac{r}{2} (3 + 4 + 5) = 6r, \quad r = 1$$

삼각형 ABC의 내접원이 세 선분 AB, BC, CA와 만나는 점을 각각 D, E, F라 하면 내접원의 성질에 의하여

$$\overline{ID} \perp \overline{AB}, \overline{IE} \perp \overline{BC}, \overline{IF} \perp \overline{CA}$$

$$\text{이고, } \overline{ID} = \overline{IE} = \overline{IF} = 1 \text{이다.}$$



이때  $\overline{OI} \perp$  (평면 ABC) 이므로 삼수선의 정리에 의하여

$$\overline{OD} \perp \overline{AB}, \overline{OE} \perp \overline{BC}, \overline{OF} \perp \overline{CA}$$

이고 세 직각삼각형 ODI, OEI, OFI가 합동이므로

$$\overline{OD} = \overline{OE} = \overline{OF}$$

이고 세 삼각형 OAB, OBC, OCA의 넓이를 각각

$S_1, S_2, S_3$ 이라 하면

$$S_1 : S_2 : S_3 = \overline{AB} : \overline{BC} : \overline{CA} = 3 : 4 : 5$$

세 삼각형 OAB, OBC, OCA의 넓이를 각각  $3a, 4a, 5a$  ( $a > 0$ )이라 하면 사면체 O-ABC의 겉넓이가 30이므로

$$6 + 3a + 4a + 5a = 30$$

$$12a = 24, \quad a = 2$$

즉, 삼각형 OAB의 넓이는 6이고  $\overline{AB} = 3$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{OD} = 6 \text{에서 } \frac{1}{2} \times 3 \times \overline{OD} = 6, \quad \overline{OD} = 4$$

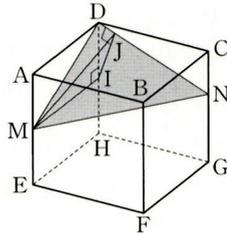
따라서 직각삼각형 ODI에서

$$\overline{OI} = \sqrt{\overline{OD}^2 - \overline{DI}^2} = \sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15}$$

답 ⑤

**5** 정육면체의 한 모서리의 길이를  $6a$  ( $a > 0$ )이라 하자.

점 M에서 평면 DHGC에 내린 수선의 발을 I라 하면 점 I는 선분 DH의 중점이고  $\overline{MI} = 6a$



점 I에서 직선 DN에 내린 수선의 발을 J라 하면 삼수선의 정리에 의하여  $\overline{MJ} \perp \overline{DN}$ 이므로  $\alpha = \angle MJI$

$$\cos \alpha = \frac{3}{7} \text{ 이므로}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{7}\right)^2} = \frac{2\sqrt{10}}{7}$$

$$\text{에서 } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2\sqrt{10}}{3}$$

$$\text{이때 } \tan \alpha = \frac{\overline{MI}}{\overline{IJ}} \text{ 이므로 } \overline{IJ} = \frac{3}{2\sqrt{10}} \times 6a = \frac{9}{\sqrt{10}} a$$

직각삼각형 DIJ에서

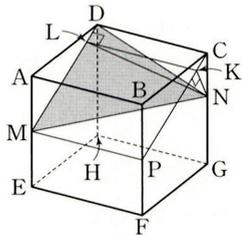
$$\overline{DJ} = \sqrt{\overline{DI}^2 - \overline{IJ}^2} = \sqrt{(3a)^2 - \left(\frac{9}{\sqrt{10}}a\right)^2} = \frac{3}{\sqrt{10}} a$$

두 삼각형 DIJ, NDC는 서로 닮은 도형이므로

$$\overline{IJ} : \overline{DJ} = \overline{DC} : \overline{NC}$$

$$\overline{NC} = \frac{\overline{DJ} \times \overline{DC}}{\overline{IJ}} = \frac{\frac{3}{\sqrt{10}} a \times 6a}{\frac{9}{\sqrt{10}} a} = 2a$$

한편, 선분 BF의 중점을 P라 하면 평면 DMC는 점 P를 지난다.



점 N에서 직선 CP에 내린 수선의 발을 K, 점 N에서 직선 DM에 내린 수선의 발을 L이라 하면 삼수선의 정리에 의하여  $\overline{KL} \perp \overline{DM}$ 이고  $\beta = \angle KLN$

두 삼각형 BPC, KCN은 서로 닮은 도형이므로

$$\overline{PC} : \overline{BC} = \overline{CN} : \overline{KN}$$

$$\text{이때 } \overline{PC} = \sqrt{\overline{BC}^2 + \overline{BP}^2} = 3\sqrt{5}a \text{ 이므로}$$

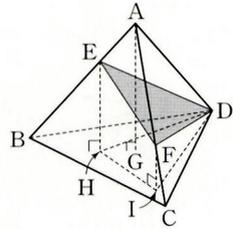
$$\overline{KN} = \frac{\overline{BC} \times \overline{CN}}{\overline{PC}} = \frac{6a \times 2a}{3\sqrt{5}a} = \frac{4}{\sqrt{5}} a$$

$$\overline{KL} = 6a \text{ 이므로}$$

$$\tan \beta = \frac{\overline{KN}}{\overline{KL}} = \frac{\frac{4}{\sqrt{5}} a}{6a} = \frac{2\sqrt{5}}{15}$$

답 ④

6



정사면체 ABCD의 한 모서리의 길이를  $3a$  ( $a > 0$ )이라 하자.

$\overline{AD} = 3a$ ,  $\overline{AE} = a$ ,  $\angle DAE = \frac{\pi}{3}$  이므로 삼각형 ADE에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{DE}^2 &= \overline{AD}^2 + \overline{AE}^2 - 2 \times \overline{AD} \times \overline{AE} \times \cos(\angle DAE) \\ &= (3a)^2 + a^2 - 2 \times 3a \times a \times \frac{1}{2} = 7a^2 \end{aligned}$$

$$\overline{DE} = \sqrt{7}a$$

$$\text{마찬가지로 } \overline{DF} = \sqrt{7}a$$

한편,  $\overline{AE} = a$ ,  $\overline{AF} = 2a$ ,  $\angle EAF = \frac{\pi}{3}$  이므로

$$\angle AEF = \frac{\pi}{2} \text{ 이고 } \overline{EF} = \sqrt{3}a$$

$\overline{DE} = \overline{DF}$  이므로 선분 EF의 중점을 M이라 하면

$$\overline{DM} \perp \overline{EF}$$

$$\text{이때 } \overline{EM} = \frac{\sqrt{3}}{2} a \text{ 이므로 직각삼각형 DEM에서}$$

$$\overline{DM} = \sqrt{\overline{DE}^2 - \overline{EM}^2} = \sqrt{(\sqrt{7}a)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2} = \frac{5}{2} a$$

삼각형 DEF의 넓이를  $S_1$ 이라 하면

$$S_1 = \frac{1}{2} \times \overline{EF} \times \overline{DM} = \frac{1}{2} \times \sqrt{3}a \times \frac{5}{2}a = \frac{5\sqrt{3}}{4} a^2$$

한편, 점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발은 삼각형 BCD의 무게중심 G와 일치한다. 점 E에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 하면 두 삼각형 ABG, EBH가 서로 닮은 도형이므로

$$\overline{BH} : \overline{BG} = \overline{BE} : \overline{BA} = 2 : 3$$

점 F에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 I라 하면 두 삼각형 ACG, FCI가 서로 닮은 도형이므로

$$\overline{CI} : \overline{CG} = \overline{CF} : \overline{CA} = 1 : 3$$

따라서 삼각형 HID의 넓이는 세 삼각형 GDH, GHI, GID의 넓이의 합과 같고 세 삼각형 GDH, GHI, GID의 넓이는 각각 삼각형 GBC의 넓이의

$$\frac{1}{3}\text{배}, \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}\text{배}, \frac{2}{3}\text{배}$$

이다. 이때 삼각형 GBC의 넓이는

$$\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times (3a)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4} a^2$$

이므로 삼각형 HID의 넓이를  $S_2$ 라 하면

$$S_2 = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right) \times \frac{3\sqrt{3}}{4} a^2$$

$$= \frac{11}{9} \times \frac{3\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{11\sqrt{3}}{12} a^2$$

따라서 평면 DEF가 평면 BCD와 이루는 예각의 크기  $\theta$ 에 대하여

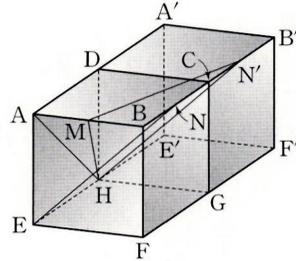
$$\cos \theta = \frac{S_2}{S_1} = \frac{\frac{11\sqrt{3}}{12} a^2}{\frac{5\sqrt{3}}{4} a^2} = \frac{11}{15}$$

답 ②

이때 직선  $O_1A$ , 직선  $AE$ , 직선  $O_1B$ , 직선  $BF$ 는 직선  $AB$ 와 한 점에서 만나고, 직선  $CD$ , 직선  $EF$ 는 직선  $AB$ 와 평행하므로 직선  $AB$ 와 꼬인 위치에 있는 직선의 개수는  $13 - 1 - 4 - 2 = 6$

2 그림과 같이 정육면체  $ABCD-EFGH$ 와 크기가 같은 정육면체  $DCB'A'-HGF'E'$ 을 면  $DHGC$ 를 공유하도록 붙이고 선분  $CB'$ 의 중점을  $N'$ 이라 하면 두 직선  $EN$ ,  $HN'$ 은 서로 평행하다.

따라서  $\angle MHN' = \theta$  또는  $\angle MHN' = \pi - \theta$



정육면체  $ABCD-EFGH$ 의 한 모서리의 길이를  $2a$  ( $a > 0$ )이라 하면

$$\overline{AH} = \sqrt{2} \overline{AE} = 2\sqrt{2}a, \overline{AM} = \frac{1}{2} \overline{AB} = a$$

이므로 직각삼각형  $AHM$ 에서

$$\overline{HM} = \sqrt{\overline{AH}^2 + \overline{AM}^2} = \sqrt{(2\sqrt{2}a)^2 + a^2} = 3a$$

두 삼각형  $AHM$ ,  $BEN$ 은 서로 합동이므로

$$\overline{EN} = \overline{HM} = 3a$$

이때 사각형  $NEHN'$ 이 평행사변형이므로

$$\overline{HN'} = \overline{EN} = 3a$$

또  $\overline{BM} = \frac{1}{2} \overline{AB} = a, \overline{BN'} = \overline{BC} + \frac{1}{2} \overline{CB'} = 3a$ 이므로

직각삼각형  $MBN'$ 에서

$$\overline{MN'} = \sqrt{\overline{BM}^2 + \overline{BN'}^2} = \sqrt{a^2 + (3a)^2} = \sqrt{10}a$$

따라서 삼각형  $MHN'$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos \theta = |\cos(\angle MHN')|$$

$$= \frac{\overline{HM}^2 + \overline{HN'}^2 - \overline{MN'}^2}{2 \times \overline{HM} \times \overline{HN'}}$$

$$= \frac{(3a)^2 + (3a)^2 - (\sqrt{10}a)^2}{2 \times 3a \times 3a} = \frac{4}{9}$$

답 ③

3 정사면체  $ABCD$ 의 꼭짓점  $A$ 에서 평면  $BCD$ 에 내린 수선의 발은 삼각형  $BCD$ 의 무게중심과 일치한다.

Level

1 기초 연습

본문 82~83쪽

- |     |     |      |     |      |
|-----|-----|------|-----|------|
| 1 ③ | 2 ③ | 3 ④  | 4 ③ | 5 19 |
| 6 ① | 7 ③ | 8 26 |     |      |

1 두 정사각뿔  $O_1-ABCD, O_2-CDEF$ 로 이루어진 입체도형의 모든 모서리를 연장한 직선 중에서 직선  $AB$ 와 꼬인 위치에 있는 직선은 직선  $O_1C$ , 직선  $O_1D$ , 직선  $O_2C$ , 직선  $O_2D$ , 직선  $O_2E$ , 직선  $O_2F$ 이므로  $a=6$

8개의 점  $A, B, C, D, E, F, O_1, O_2$  중 서로 다른 세 점을 지나는 평면 중에서 직선  $AB$ 와 평행한 평면은 직선  $AB$ 와 평행한 직선을 포함하므로 직선  $CD$  또는 직선  $EF$ 를 포함해야 한다.

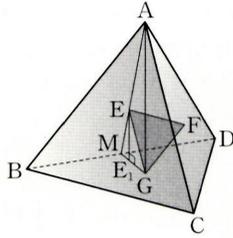
직선  $CD$ 를 포함하고 직선  $AB$ 와 평행한 평면은 평면  $O_1CD$ , 평면  $O_2CD$ 이고, 직선  $EF$ 를 포함하고 직선  $AB$ 와 평행한 평면은 평면  $O_1EF$ , 평면  $O_2EF$ 이므로  $b=4$

따라서  $a+b=6+4=10$

답 ③

참고

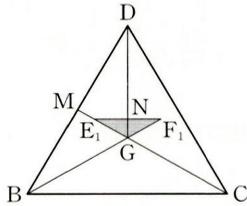
이 입체도형의 모든 모서리를 연장한 서로 다른 직선의 개수는 13이다.



점 E에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을  $E_1$ 이라 하자. 선분 BD의 중점을 M이라 하면 점 E는 삼각형 ABD의 무게중심이므로  $\overline{AM} : \overline{EM} = 3 : 1$

두 삼각형  $\triangle EME_1$ ,  $\triangle AMG$ 가 서로 닮은 도형이므로  $\overline{MG} : \overline{ME_1} = 3 : 1$

즉, 점  $E_1$ 은 삼각형 GBD의 무게중심과 일치한다. 마찬가지로 점 F에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을  $F_1$ 이라 하면 점  $F_1$ 은 삼각형 GCD의 무게중심과 일치한다.



$$\angle GBM = \frac{\pi}{6}, \overline{BM} = 3 \text{이므로}$$

$$\overline{MG} = \overline{BM} \tan(\angle GBM) = 3 \tan \frac{\pi}{6} = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

$$\overline{E_1G} = \frac{2}{3} \overline{MG} = \frac{2}{3} \times \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\overline{F_1G} = \overline{E_1G} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

두 선분  $E_1F_1$ ,  $DG$ 의 교점을 N이라 하자.

$$\angle E_1GN = \angle F_1GN = \frac{\pi}{3} \text{이므로 } \angle E_1GF_1 = \frac{2}{3}\pi$$

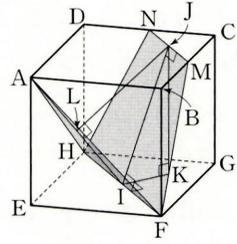
삼각형 EFG의 평면 BCD 위로의 정사영은 삼각형  $E_1F_1G$ 이므로 넓이는

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times \overline{E_1G} \times \overline{F_1G} \times \sin \frac{2}{3}\pi &= \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

답 ④

- 4 정육면체의 한 모서리의 길이를  $4a$  ( $a > 0$ )이라 하자.  $\overline{AH} = \overline{AF} = \overline{HF} = 4\sqrt{2}a$ 이므로 삼각형 AHF는 정삼각형이고, 선분 HF의 중점을 I라 하면  $\overline{AI} \perp \overline{HF}$ 이고

$$\overline{AI} = \frac{\sqrt{3}}{2} \overline{AH} = 2\sqrt{6}a$$



$\overline{CM} = \overline{CN}$ 이므로 선분 MN의 중점을 J라 하면  $\overline{CJ} \perp \overline{MN}$

$$\text{이고 } \overline{CJ} = \frac{1}{\sqrt{2}} \overline{CM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} \times 4a = \sqrt{2}a$$

또  $\overline{AM} = \overline{AN}$ 이므로  $\overline{AJ} \perp \overline{MN}$

즉, 점 J는 두 선분 AC, MN의 교점이고

$$\overline{AJ} = \overline{AC} - \overline{CJ} = 4\sqrt{2}a - \sqrt{2}a = 3\sqrt{2}a$$

한편, 점 J에서 평면 EFGH에 내린 수선의 발을 K라 하면  $\overline{JK} = 4a$ 이고 점 K는 선분 EG 위의 점이며

$$\begin{aligned} \overline{IK} &= \overline{IG} - \overline{KG} = \frac{1}{2} \overline{EG} - \overline{CJ} \\ &= \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2}a - \sqrt{2}a = \sqrt{2}a \end{aligned}$$

직각삼각형 JIK에서

$$\overline{IJ} = \sqrt{\overline{JK}^2 + \overline{IK}^2} = \sqrt{(4a)^2 + (\sqrt{2}a)^2} = 3\sqrt{2}a$$

또  $\overline{KI} \perp \overline{HF}$ 이므로 삼수선의 정리에 의하여  $\overline{IJ} \perp \overline{HF}$

따라서 평면 AHF와 평면 MNHF가 이루는 예각의 크기  $\theta$ 는  $\theta = \angle AIJ$

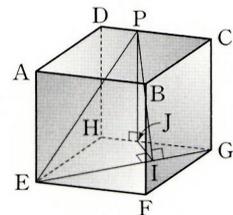
한편,  $\overline{AJ} = \overline{IJ}$ 에서 삼각형 AIJ는 이등변삼각형이고 선분 AI의 중점을 L이라 하면  $\overline{AI} \perp \overline{JL}$

따라서

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \cos(\angle JIL) = \frac{\overline{IL}}{\overline{IJ}} = \frac{\frac{1}{2} \overline{AI}}{\overline{IJ}} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \times 2\sqrt{6}a}{3\sqrt{2}a} = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

답 ③

- 5 점 P와 직선 EG 사이의 거리가  $\sqrt{11}$ 이므로 점 P에서 직선 EG에 내린 수선의 발을 I라 하면  $\overline{PI} = \sqrt{11}$



점 P에서 평면 EFGH에 내린 수선의 발을 J라 하면 점 J는 선분 GH 위의 점이고, 삼수선의 정리에 의하여  $\overline{IJ} \perp \overline{EG}$  직각삼각형 PJI에서

$$\overline{IJ} = \sqrt{\overline{PI}^2 - \overline{PJ}^2} = \sqrt{(\sqrt{11})^2 - 3^2} = \sqrt{2}$$

$$\angle IGJ = \frac{\pi}{4} \text{이므로}$$

$$\overline{GJ} = \frac{\overline{IJ}}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2$$

$$\overline{HJ} = \overline{GH} - \overline{GJ} = 3 - 2 = 1$$

직각삼각형 EJH에서

$$\overline{EJ} = \sqrt{\overline{EH}^2 + \overline{HJ}^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

직선 PE와 평면 EFGH가 이루는 예각의 크기  $\theta$ 는

$$\theta = \angle PEJ \text{이므로}$$

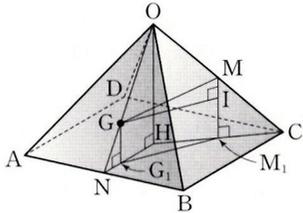
$$\tan^2 \theta = \left( \frac{\overline{PJ}}{\overline{EJ}} \right)^2 = \left( \frac{3}{\sqrt{10}} \right)^2 = \frac{9}{10}$$

따라서  $p=10$ ,  $q=9$ 이므로

$$p+q=10+9=19$$

답 19

- 6 꼭짓점 O에서 평면 ABCD에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 사각형 ABCD의 두 대각선 AC, BD의 교점이다.



선분 AB의 중점을 N, 두 점 G, M에서 평면 ABCD에 내린 수선의 발을 각각  $G_1$ ,  $M_1$ 이라 하자.

점 G가 삼각형 OAB의 무게중심이므로

$$\overline{ON} : \overline{GN} = 3 : 1$$

두 삼각형 ONH, GNG<sub>1</sub>이 서로 닮은 도형이므로

$$\overline{HN} : \overline{G_1N} = 3 : 1$$

$$\overline{HG_1} = \frac{2}{3} \overline{HN} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \overline{BC} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 6 = 2$$

또  $\overline{OC} : \overline{MC} = 2 : 1$ 이고 두 삼각형 OHC, MM<sub>1</sub>C가 서로 닮은 도형이므로  $\overline{HC} : \overline{M_1C} = 2 : 1$

$$\begin{aligned} \overline{HM_1} &= \frac{1}{2} \overline{HC} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \overline{AC} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \overline{AB} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 6 = \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$\angle G_1HM_1 = \frac{3}{4}\pi$ 이므로 삼각형  $HG_1M_1$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{G_1M_1}^2 &= \overline{HG_1}^2 + \overline{HM_1}^2 - 2 \times \overline{HG_1} \times \overline{HM_1} \times \cos(\angle G_1HM_1) \\ &= 2^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2 \times 2 \times \frac{3\sqrt{2}}{2} \times \cos \frac{3}{4}\pi \\ &= \frac{29}{2} \end{aligned}$$

$$\overline{G_1M_1} = \frac{\sqrt{58}}{2}$$

한편,  $\overline{OH} = \sqrt{\overline{OC}^2 - \overline{HC}^2} = \sqrt{6^2 - (3\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{2}$ 이므로

$$\overline{GG_1} = \frac{1}{3} \overline{OH} = \sqrt{2}, \quad \overline{MM_1} = \frac{1}{2} \overline{OH} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

점 G에서 직선 MM<sub>1</sub>에 내린 수선의 발을 I라 하면 사각형 GG<sub>1</sub>M<sub>1</sub>I가 직사각형이므로

$$\begin{aligned} \overline{IM_1} &= \overline{GG_1} \\ \overline{MI} &= \overline{MM_1} - \overline{IM_1} = \overline{MM_1} - \overline{GG_1} \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

직선 GM과 평면 ABCD가 이루는 예각의 크기  $\theta$ 는  $\angle MGI$ 와 같으므로

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \tan(\angle MGI) = \frac{\overline{MI}}{\overline{GI}} = \frac{\overline{MI}}{\overline{G_1M_1}} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{58}}{2}} = \frac{\sqrt{29}}{29} \end{aligned}$$

답 ①

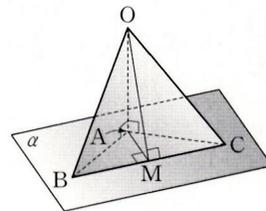
- 7 조건 (나)에서 세 점 A, B, C는 한 직선 위의 점이 아니다. 조건 (가)에서 두 평면 OAB, OAC가 모두 평면  $\alpha$ 에 수직이므로  $\overline{OA} \perp \alpha$  ..... ㉠

조건 (나)에서  $\overline{AB} = \overline{AC} = \sqrt{6}$ ,  $\overline{BC} = 4$ 이므로 선분 BC의 중점을 M이라 하면  $\overline{BM} = \frac{1}{2} \overline{BC} = 2$ 이고

$$\angle BMA = \frac{\pi}{2} \quad \dots\dots \text{㉡}$$

이므로 직각삼각형 ABM에서

$$\overline{AM} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BM}^2} = \sqrt{(\sqrt{6})^2 - 2^2} = \sqrt{2}$$



또 ㉠, ㉡에서 삼수선의 정리에 의하여  $\overline{OM} \perp \overline{BC}$ 이고 삼각형 OBC의 넓이가  $4\sqrt{3}$ 이므로

$$4\sqrt{3} = \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{OM} = \frac{1}{2} \times 4 \times \overline{OM} = 2\overline{OM}$$

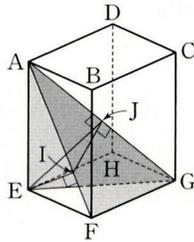
$$\overline{OM} = 2\sqrt{3}$$

점 O와 평면  $\alpha$  사이의 거리는 선분 OA의 길이와 같고, 직각삼각형 OAM에서

$$\overline{OA} = \sqrt{\overline{OM}^2 - \overline{AM}^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{10}$$

답 ③

- 8 직선 FG가 평면 AEFB에 수직이므로 평면 AFG는 평면 AEFB에 수직이다. 따라서 점 E에서 평면 AFG에 내린 수선의 발을 I라 하면 점 I는 두 평면 AFG, AEFB의 교선인 직선 AF 위에 있다.



$\overline{AE} = 5$ ,  $\overline{EF} = 3$ 이므로 직각삼각형 AEF에서

$$\overline{AF} = \sqrt{\overline{AE}^2 + \overline{EF}^2} = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$$

$$\overline{AE} \times \overline{EF} = \overline{AF} \times \overline{EI} \text{에서 } \overline{EI} = \frac{\overline{AE} \times \overline{EF}}{\overline{AF}} = \frac{15}{\sqrt{34}}$$

또  $\overline{FG} = 4$ 이므로 직각삼각형 EFG에서

$$\overline{EG} = \sqrt{\overline{EF}^2 + \overline{FG}^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$\overline{AE} = \overline{EG}$ 이므로 직각이등변삼각형 AEG에서

$$\overline{AG} = \sqrt{2} \overline{AE} = 5\sqrt{2}$$

점 E에서 직선 AG에 내린 수선의 발을 J라 하면

$$\overline{EJ} = \frac{1}{\sqrt{2}} \overline{AE} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

삼수선의 정리에 의하여  $\overline{IJ} \perp \overline{AG}$ 이므로 두 평면 AFG, AEG가 이루는 예각의 크기  $\theta$ 는  $\theta = \angle EJI$

따라서

$$\sin^2 \theta = \left( \frac{\overline{EI}}{\overline{EJ}} \right)^2 = \frac{\left( \frac{15}{\sqrt{34}} \right)^2}{\left( \frac{5}{\sqrt{2}} \right)^2} = \frac{3^2 \times 5^2}{34} = \frac{9}{17}$$

즉,  $p=17$ ,  $q=9$ 이므로

$$p+q=17+9=26$$

답 26

Level 2

기본 연습

본문 84~85쪽

- |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1 ② | 2 ② | 3 ⑤ | 4 ④ | 5 ② |
| 6 ① | 7 ③ | 8 ⑤ |     |     |

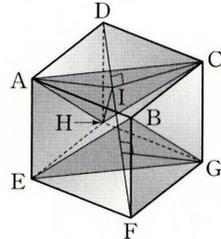
- 1 정육면체 ABCD-EFGH의 모든 모서리의 길이가 같으므로  $\overline{DA} = \overline{DH} = \overline{DC}$

또  $\overline{AF} = \overline{HF} = \overline{CF}$ 이고 선분 DF가 공통이므로 세 삼각형 DAF, DHF, DCF는 모두 합동이다.

따라서 세 점 A, H, C에서 선분 DF에 내린 수선의 발은 모두 일치하고, 이 점을 I라 하면

$$\overline{DF} \perp \overline{AI}, \overline{DF} \perp \overline{HI}, \overline{DF} \perp \overline{CI}$$

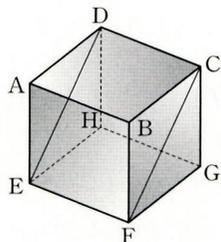
이므로 직선 DF는 평면 ACH에 수직이다. 마찬가지로 직선 DF는 평면 BEG에 수직이다.



따라서 평면 AHC 또는 평면 BEG에 포함되는 직선과 직선 DF는 서로 수직이므로 정육면체 ABCD-EFGH의 서로 다른 두 꼭짓점을 지나는 직선 중에서 직선 DF에 수직인 직선은

직선 AC, 직선 AH, 직선 CH, 직선 BE, 직선 BG, 직선 EG이므로  $a=6$

한편, 직선 DE는 직선 CF와 평행하므로 직선 DE를 포함하는 평면 중 두 점 C, F를 지나지 않는 평면은 직선 CF와 평행하다.



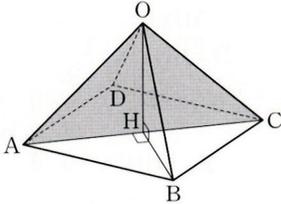
즉, 정육면체 ABCD-EFGH의 서로 다른 세 꼭짓점을 지나는 평면 중에서 직선 CF와 평행한 평면은

평면 AEHD, 평면 DEB, 평면 DEG이므로  $b=3$

따라서  $a+b=6+3=9$

㉔ ②

- 2  $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=\overline{OD}$ 이므로 점 O에서 평면 ABCD에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 밑면의 두 대각선 AC, BD의 교점과 같다.



이때 정사각형 ABCD의 두 대각선 AC, BD는 서로 수직으로 만나므로  $\overline{AH}\perp\overline{BH}$ 이고  $\overline{OH}\perp\overline{BH}$ 이므로 점 B에서 평면 OAC에 내린 수선의 발은 점 H와 일치하고, 삼각형 OAB의 평면 OAC 위로의 정사영은 삼각형 OAH와 같다. 삼각형 OAB의 넓이를  $S_1$ 이라 하면

$$S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \overline{OA}^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 6^2 = 9\sqrt{3}$$

한편,  $\overline{AC} = \sqrt{2}\overline{AB} = 6\sqrt{2}$ 이고  $\overline{OA} = \overline{OC} = 6$ 이므로

$$\angle AOC = \frac{\pi}{2} \text{ 이고}$$

$$\overline{OH} = \overline{AH} = \frac{1}{2}\overline{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 6 = 3\sqrt{2}$$

삼각형 OAH의 넓이를  $S_2$ 라 하면

$$S_2 = \frac{1}{2} \times \overline{AH} \times \overline{OH} = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 9$$

평면 OAB와 평면 OAC가 이루는 예각의 크기를  $\theta$ 라 하면

$$\cos \theta = \frac{S_2}{S_1} = \frac{9}{9\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

삼각형 OAC의 넓이를 S라 하면

$$S = 2S_2 = 2 \times 9 = 18$$

삼각형 OAC의 평면 OAB 위로의 정사영의 넓이를  $S'$ 이라 하면

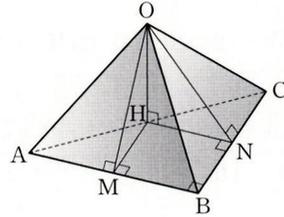
$$S' = S \times \cos \theta = 18 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 6\sqrt{3}$$

㉔ ②

- 3 조건 (가)에서 두 삼각형 OAB, OBC가 모두 정삼각형이고 변 OB는 공통이므로  $\overline{AB} = \overline{BC}$

조건 (나)에서  $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$ 이므로 삼각형 ABC는 직각이등변삼각형이다.

또  $\overline{OA} = \overline{BA}$ 이고  $\overline{OC} = \overline{BC}$ 이므로 두 삼각형 AOC, ABC는 서로 합동이다. 즉, 삼각형 AOC는  $\angle AOC = \frac{\pi}{2}$ 인 직각이등변삼각형이다.



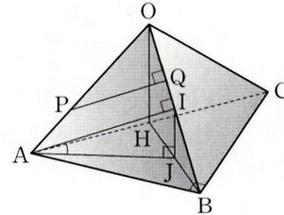
두 선분 AB, BC의 중점을 각각 M, N이라 하고 점 O에서 평면 ABC에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$$\overline{AB} \perp \overline{OM}, \overline{BC} \perp \overline{ON}$$

에서 삼수선의 정리에 의하여

$$\overline{AB} \perp \overline{HM}, \overline{BC} \perp \overline{HN}$$

이므로 점 H는 두 선분 AB, BC를 각각 수직이등분하는 직선의 교점이고  $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$ 이므로 점 H는 선분 AC의 중점이다.



$\overline{OA} = 6a$  ( $a > 0$ )이라 하면 두 점 P, Q는 각각 두 선분 OA, BO를 2 : 1로 내분하는 점이므로

$$\overline{OP} = \frac{2}{3}\overline{OA} = 4a, \overline{OQ} = \frac{1}{3}\overline{OB} = 2a$$

이때  $\angle POQ = \frac{\pi}{3}$ 이므로  $\angle PQO = \frac{\pi}{2}$

선분 OB의 중점을 I라 하면 두 삼각형 OPQ, OAI는 서로 닮은 도형이므로  $\overline{PQ} \parallel \overline{AI}$

따라서 직선 PQ가 평면 ABC와 이루는 예각의 크기는 직선 AI가 평면 ABC와 이루는 예각의 크기와 같다.

$$\overline{AI} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{OA} = 3\sqrt{3}a$$

이고 점 I에서 평면 ABC에 내린 수선의 발을 J라 하면

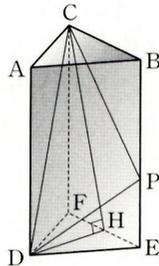
$$\overline{IJ} = \frac{1}{2}\overline{OH} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{OA} = \frac{3\sqrt{2}}{2}a$$

직각삼각형 AIJ에서

$$\overline{AJ} = \sqrt{\overline{AI}^2 - \overline{IJ}^2} = \sqrt{(3\sqrt{3}a)^2 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}a\right)^2} = \frac{3\sqrt{10}}{2}a$$

따라서  $\cos \theta = \cos (\angle IAJ) = \frac{\overline{AJ}}{\overline{AI}} = \frac{3\sqrt{10}}{2} \frac{a}{3\sqrt{3}a} = \frac{\sqrt{30}}{6}$  답 ⑤

- 4  $\overline{BC}=2, \overline{CP}=\sqrt{22}$ 이므로 직각삼각형 CPB에서  
 $\overline{BP}=\sqrt{\overline{CP}^2-\overline{BC}^2}=\sqrt{(\sqrt{22})^2-2^2}=3\sqrt{2}$   
 $\overline{DE}=2, \overline{DP}=\sqrt{6}$ 이므로 직각삼각형 PDE에서  
 $\overline{EP}=\sqrt{\overline{DP}^2-\overline{DE}^2}=\sqrt{(\sqrt{6})^2-2^2}=\sqrt{2}$   
 따라서  
 $\overline{BE}=\overline{BP}+\overline{EP}=4\sqrt{2}, \overline{AD}=\overline{BE}=4\sqrt{2}$   
 이므로 직각삼각형 CAD에서  
 $\overline{CD}=\sqrt{\overline{CA}^2+\overline{AD}^2}=\sqrt{2^2+(4\sqrt{2})^2}=6$



두 평면 DEF, CFEB가 서로 수직이므로 점 D에서 평면 CFEB에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 직선 EF 위의 점이고, 삼각형 DEF가 정삼각형이므로 점 H는 선분 EF의 중점이다.

직각삼각형 CFH에서

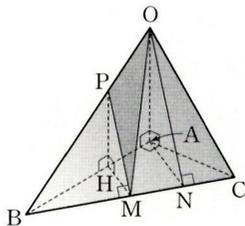
$$\overline{CH}=\sqrt{\overline{CF}^2+\overline{FH}^2}=\sqrt{(4\sqrt{2})^2+1^2}=\sqrt{33}$$

직선 CD와 평면 CFEB가 이루는 예각의 크기  $\theta$ 는  $\theta = \angle DCH$ 이므로

$$\cos \theta = \cos (\angle DCH) = \frac{\overline{CH}}{\overline{CD}} = \frac{\sqrt{33}}{6}$$

답 ④

5



점 P를 지나고 직선 OA와 평행한 직선은 선분 AB와 만난다. 이 점을 H라 하자.

$\overline{OA} \perp \overline{AB}, \overline{OA} \perp \overline{AC}$ 에서 직선 OA는 평면 ABC와 수직이므로 직선 OA와 평행한 직선 PH는 평면 ABC와 수직이다.

이때  $\overline{PM} \perp \overline{BC}$ 이므로 삼수선의 정리에 의하여  $\overline{HM} \perp \overline{BC}$   
 $\overline{AB}=6, \overline{AC}=2\sqrt{3}, \angle BAC=\frac{\pi}{2}$ 에서

$$\overline{BC}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2}=\sqrt{6^2+(2\sqrt{3})^2}=4\sqrt{3}$$

두 삼각형 ABC, MBH는 서로 닮은 도형이므로

$$\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{MB} : \overline{BH}$$

$$\overline{BH} = \frac{\overline{BC} \times \overline{MB}}{\overline{AB}} = \frac{4\sqrt{3} \times 2\sqrt{3}}{6} = 4$$

또 두 삼각형 OBA, PBH는 서로 닮은 도형이므로

$$\overline{BO} : \overline{BP} = \overline{BA} : \overline{BH} = 6 : 4 = 3 : 2$$

$$\overline{BO} : \overline{PO} = 3 : 1$$

즉, 삼각형 OPM의 넓이는 삼각형 OBM의 넓이의  $\frac{1}{3}$ 배이고,

삼각형 OBM의 넓이는 삼각형 OBC의 넓이의  $\frac{1}{2}$ 배이므로

삼각형 OPM의 넓이는 삼각형 OBC의 넓이의

$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$ 배, 즉  $\frac{1}{6}$ 배이다. 삼각형 OPM의 넓이가 3이므로

삼각형 OBC의 넓이는

$$3 \times 6 = 18$$

점 O에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 N이라 하면

$$\frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{ON} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times \overline{ON} = 18$$

$$\overline{ON} = 3\sqrt{3}$$

직선 OA는 평면 ABC와 수직이므로 삼수선의 정리에 의하여  $\overline{AN} \perp \overline{BC}$

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \overline{BC} \times \overline{AN}$$

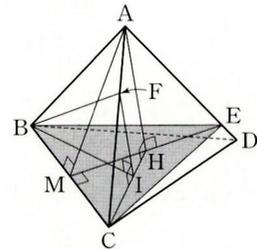
$$\overline{AN} = \frac{\overline{AB} \times \overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{6 \times 2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = 3$$

직각삼각형 OAN에서

$$\overline{OA} = \sqrt{\overline{ON}^2 + \overline{AN}^2} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$$

답 ②

- 6 선분 BC의 중점을 M이라 하자.



$\overline{AM} \perp \overline{BC}$ ,  $\overline{DM} \perp \overline{BC}$ 에서 평면 AMD가 직선 BC에 수직이므로  $\overline{EM} \perp \overline{BC}$ 이고, 두 평면 ABC, BCE가 이루는 예각의 크기  $\alpha$ 는

$$\alpha = \angle AME$$

정사면체 ABCD의 한 모서리의 길이를  $6a$  ( $a > 0$ )이라 하면 삼각형 ABC가 정삼각형이므로  $\overline{AB} = 6a$ 에서

$$\overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2} \overline{AB} = 3\sqrt{3}a$$

점 A에서 평면 BCE에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\begin{aligned} \overline{AH} &= \overline{AM} \sin(\angle AMH) = \overline{AM} \times \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \\ &= 3\sqrt{3}a \times \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2} = 3\sqrt{3}a \times \frac{\sqrt{7}}{3} = \sqrt{21}a \end{aligned}$$

한편, 평면 BCE는 직선 AH에 수직이므로 평면 BCE는 직선 AH를 포함하는 평면 ACH에 수직이다.

따라서 점 F에서 평면 BCE에 내린 수선의 발을 I라 하면 점 I는 평면 BCE와 평면 ACH의 교선 CH 위의 점이다.

두 삼각형 ACH, FCI가 서로 닮은 도형이므로

$$\overline{FI} : \overline{AH} = \overline{FC} : \overline{AC} = 2 : 3$$

$$\overline{FI} = \frac{2}{3} \overline{AH} = \frac{2\sqrt{21}}{3}a$$

또  $\overline{AB} = 6a$ ,  $\overline{AF} = 2a$ ,  $\angle BAF = \frac{\pi}{3}$ 이므로 삼각형 ABF

에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{BF}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{AF}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{AF} \times \cos(\angle BAF) \\ &= (6a)^2 + (2a)^2 - 2 \times 6a \times 2a \times \frac{1}{2} \\ &= 28a^2 \end{aligned}$$

$$\overline{BF} = 2\sqrt{7}a$$

직선 BF와 평면 BCE가 이루는 예각의 크기  $\beta$ 는

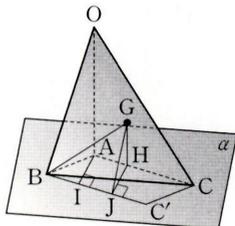
$$\beta = \angle FBI$$

이므로

$$\sin \beta = \sin(\angle FBI) = \frac{\overline{FI}}{\overline{BF}} = \frac{\frac{2\sqrt{21}}{3}a}{2\sqrt{7}a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

답 ①

7



평면  $\alpha$  위의 점  $C'$ 을 사각형  $ABC'C$ 가 평행사변형이 되도록 잡으면 두 직선  $BG, AC$ 가 이루는 예각의 크기  $\theta$ 는 두 직선  $BG, BC'$ 이 이루는 예각의 크기와 같으므로

$$\theta = \angle GBC'$$

조건 (나)에서  $\overline{OA} \perp \alpha$ 이므로 평면 OAC는 평면  $\alpha$ 에 수직이고, 점 G에서 평면  $\alpha$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 선분 AC 위의 점이다.

두 점 A, H에서 직선  $BC'$ 에 내린 수선의 발을 각각 I, J라 하자.

$$\angle BAC = \frac{2}{3}\pi \text{이고 두 직선 AC, BC'이 서로 평행하므로}$$

$$\angle ABC' = \pi - \angle BAC = \frac{\pi}{3}$$

$$\overline{AI} = \overline{AB} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\overline{HJ} = \overline{AI} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\overline{GH} = \frac{1}{3} \overline{OA} = 1$$

직각삼각형 GJH에서

$$\overline{GJ} = \sqrt{\overline{GH}^2 + \overline{HJ}^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

또

$$\overline{AH} = \frac{1}{3} \overline{AC} = \frac{2}{3}$$

$$\overline{BI} = \overline{AB} \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\overline{IJ} = \overline{AH} = \frac{2}{3}$$

$$\overline{BJ} = \overline{BI} + \overline{IJ} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$$

삼수선의 정리에 의하여  $\angle BJK = \frac{\pi}{2}$ 이므로 직각삼각형

GBJ에서

$$\overline{GB} = \sqrt{\overline{GJ}^2 + \overline{BJ}^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{6}\right)^2} = \frac{2\sqrt{7}}{3}$$

$$\text{따라서 } \cos \theta = \cos(\angle GBJ) = \frac{\overline{BJ}}{\overline{GB}} = \frac{\frac{7}{6}}{\frac{2\sqrt{7}}{3}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

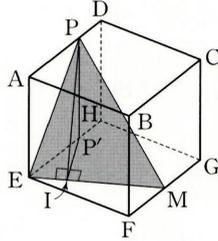
답 ③

- 8 두 점 E, M은 평면 EFGH 위의 점이므로 점 P에서 평면 EFGH에 내린 수선의 발을 P'이라 할 때, 삼각형 PEM의 평면 EFGH 위로의 정사영은 삼각형 P'EM이다. 이때 점 P'은 선분 EH 위의 점이고  $\overline{AP} = \overline{EP'}$ 이다.

정육면체의 한 모서리의 길이가 2이고 삼각형 P'EM의 넓이가  $\sqrt{2}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times \overline{EP'} \times \overline{EF} = \frac{1}{2} \times \overline{EP'} \times 2 = \overline{EP'} = \sqrt{2}$$

즉,  $\overline{AP} = \sqrt{2}$



점 P에서 선분 EM에 내린 수선의 발을 I라 하면 삼수선의 정리에 의하여  $\overline{PI} \perp \overline{EM}$

직각삼각형 EFM에서

$$\overline{EM} = \sqrt{\overline{EF}^2 + \overline{FM}^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

삼각형 P'EM의 넓이가  $\sqrt{2}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times \overline{EM} \times \overline{PI} = \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \overline{PI} = \sqrt{2}$$

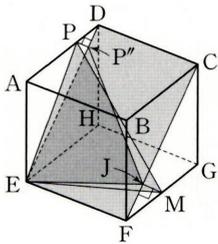
$$\overline{PI} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{10}}{5}$$

직각삼각형 PIP'에서

$$\overline{PP'} = \sqrt{\overline{PI}^2 + \overline{P'I}^2} = \sqrt{2^2 + \left(\frac{2\sqrt{10}}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{35}}{5}$$

따라서 삼각형 PEM의 넓이를 S라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times \overline{EM} \times \overline{PI} = \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \frac{2\sqrt{35}}{5} = \sqrt{7}$$



평면 CEF는 점 D를 지나므로 점 P에서 평면 CEF에 내린 수선의 발을 P''이라 하면 점 P''은 선분 DE 위의 점이고, 점 M에서 평면 CEF에 내린 수선의 발을 J라 하면 점 J는 선분 CF 위의 점이다.

$$\overline{AD} = 2, \overline{AP} = \sqrt{2} \text{에서}$$

$$\overline{DP} = \overline{AD} - \overline{AP} = 2 - \sqrt{2}$$

$$\overline{DP''} = \frac{1}{\sqrt{2}} \overline{DP} = \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$$

$$\overline{DE} = \sqrt{2} \overline{AD} = 2\sqrt{2} \text{이므로}$$

$$\overline{EP''} = \overline{DE} - \overline{DP''} = 2\sqrt{2} - (\sqrt{2} - 1) = \sqrt{2} + 1$$

점 J와 직선 DE 사이의 거리는 정육면체의 모서리의 길이 2와 같으므로 삼각형 P''EJ의 넓이를 S'이라 하면

$$S' = \frac{1}{2} \times \overline{EP''} \times 2 = \sqrt{2} + 1$$

따라서 두 평면 PEM, CEF가 이루는 예각의 크기  $\theta$ 에 대하여

$$\cos^2 \theta = \left(\frac{S'}{S}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{7}}\right)^2 = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{7}$$

답 ⑤

Level  
**3 실력 완성**

본문 86쪽

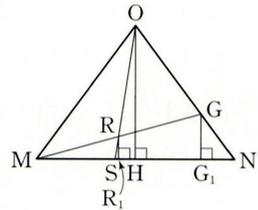
1 750    2 ⑤    3 16

1 선분 CD의 중점을 N이라 하자.

마름모는 두 대각선이 서로를 수직이등분하므로 마름모 GPMQ에 대하여 두 대각선 MG, PQ의 대각선의 교점을 R이라 하면 점 R은 선분 MG의 중점이고

$$\overline{PQ} \perp \overline{MG}, \overline{PR} = \overline{QR}$$

이므로 직선 PQ는 점 R을 지나고 평면 OMN에 수직이다.



두 점 O, G에서 평면 ABCD에 내린 수선의 발을 각각 H, G1이라 하면 두 삼각형 OHN, GG1N이 서로 닮은 도형이고

$$\overline{OH} : \overline{GG_1} = \overline{ON} : \overline{GN} = 3 : 1$$

$$\text{이므로 } \overline{GG_1} = \frac{1}{3} \overline{OH} \quad \dots \textcircled{1}$$

두 직선 OR, MN의 교점을 S라 하고 점 R에서 평면 ABCD에 내린 수선의 발을 R1이라 하면 두 삼각형 MGG1, MRR1은 서로 닮은 도형이고

$$\overline{GG_1} : \overline{RR_1} = \overline{MG} : \overline{MR} = 2 : 1$$

$$\text{이므로 } \overline{RR_1} = \frac{1}{2} \overline{GG_1} \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②에서

$$\overline{RR_1} = \frac{1}{2} \overline{GG_1} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \overline{OH} = \frac{1}{6} \overline{OH}$$

$$\overline{OH} : \overline{RR_1} = 6 : 1$$

또 두 삼각형 SHO, SR<sub>1</sub>R은 서로 닮은 도형이고

$$\overline{SO} : \overline{SR} = \overline{OH} : \overline{RR_1} = 6 : 1$$

$$\text{이므로 } \overline{OR} : \overline{OS} = 5 : 6 \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

직선 PQ가 점 R을 지나고 평면 OMN에 수직, 즉 평면 ABCD에 평행하므로 직선 OP가 선분 AD와 만나는 점을 P<sub>2</sub>, 직선 OQ가 선분 BC와 만나는 점을 Q<sub>2</sub>라 하면 두 삼각형 OPQ, OP<sub>2</sub>Q<sub>2</sub>는 서로 닮은 도형이고 ㉠에서 두 삼각형 OPQ, OP<sub>2</sub>Q<sub>2</sub>의 닮음비는 5 : 6이다.

$$\text{따라서 } \overline{PQ} = \frac{5}{6} \overline{P_2Q_2} = \frac{5}{6} \times 6 = 5$$

두 점 P, Q에서 평면 ABCD에 내린 수선의 발을 각각 P<sub>1</sub>, Q<sub>1</sub>이라 하면

$$\overline{P_1Q_1} = \overline{PQ} = 5$$

$$\text{또 } \overline{NG_1} = \frac{1}{3} \overline{NH} = \frac{1}{3} \times 3 = 1 \text{이므로}$$

$$\overline{MG_1} = \overline{MN} - \overline{NG_1} = 6 - 1 = 5$$

사각형 GPMQ의 평면 ABCD 위로의 정사영은 사각형 G<sub>1</sub>P<sub>1</sub>MQ<sub>1</sub>이고  $\overline{G_1M} \perp \overline{P_1Q_1}$ 이므로 사각형 G<sub>1</sub>P<sub>1</sub>MQ<sub>1</sub>의 넓이 S는

$$S = \frac{1}{2} \times 5 \times 5 = \frac{25}{2}$$

$$\text{따라서 } 60 \times S = 60 \times \frac{25}{2} = 750$$

답 750

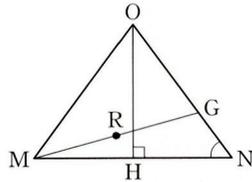
**다른 풀이1**

선분 CD의 중점을 N이라 하자.

$$\overline{OM} = \overline{ON} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \overline{OA} = 3\sqrt{3}$$

점 O에서 평면 ABCD에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 정사각형 ABCD의 두 대각선 AC, BD의 교점과 같고

$$\overline{HN} = \frac{1}{2} \overline{AB} = 3$$



$$\cos(\angle ONH) = \frac{\overline{HN}}{\overline{ON}} = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

점 G가 삼각형 OCD의 무게중심이므로

$$\overline{NG} = \frac{1}{3} \overline{ON} = \sqrt{3}$$

삼각형 GMN에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{MG}^2 = \overline{MN}^2 + \overline{NG}^2 - 2 \times \overline{MN} \times \overline{NG} \times \cos(\angle GNM)$$

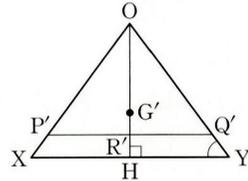
$$= 6^2 + (\sqrt{3})^2 - 2 \times 6 \times \sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = 27$$

$$\overline{MG} = 3\sqrt{3}$$

한편, 마름모는 두 대각선이 서로를 수직이등분하므로 마름모 GPMQ에 대하여 두 대각선 MG, PQ의 대각선의 교점을 R이라 하면 점 R은 선분 MG의 중점이고

$$\overline{PQ} \perp \overline{MG}, \overline{PR} = \overline{QR}$$

이므로 직선 PQ는 점 R을 지나고 평면 OMN에 수직이다. 두 선분 AD, BC의 중점을 각각 X, Y라 하고, 네 점 G, R, P, Q에서 평면 OXY에 내린 수선의 발을 각각 G', R', P', Q'이라 하자.



점 R이 선분 MG의 중점이므로

$$\overline{R'H} = \frac{1}{2} \overline{G'H} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \overline{OH} = \frac{1}{6} \overline{OH}$$

$$\text{에서 } \overline{OR'} = \overline{OH} - \overline{R'H} = \frac{5}{6} \overline{OH}$$

두 삼각형 OP'Q', OXY가 서로 닮은 도형이므로

$$\overline{P'Q'} = \frac{5}{6} \overline{XY} = 5$$

즉,  $\overline{PQ} = \overline{P'Q'} = 5$ 이므로 마름모 GPMQ의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{MG} \times \overline{PQ} = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{3} \times 5 = \frac{15\sqrt{3}}{2}$$

한편, 삼각형 GMN에서 코사인법칙에 의하여

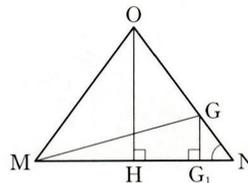
$$\begin{aligned} \cos(\angle GMN) &= \frac{\overline{MG}^2 + \overline{MN}^2 - \overline{NG}^2}{2 \times \overline{MG} \times \overline{MN}} \\ &= \frac{(3\sqrt{3})^2 + 6^2 - (\sqrt{3})^2}{2 \times 3\sqrt{3} \times 6} = \frac{5\sqrt{3}}{9} \end{aligned}$$

두 평면 GPMQ, ABCD가 이루는 예각의 크기가  $\angle GMN$ 과 같으므로 구하는 정사영의 넓이 S는

$$S = \frac{15\sqrt{3}}{2} \times \frac{5\sqrt{3}}{9} = \frac{25}{2}$$

$$\text{따라서 } 60 \times S = 60 \times \frac{25}{2} = 750$$

**다른 풀이2**



선분 CD의 중점을 N이라 하자. 두 점 O, G에서 평면

ABCD에 내린 수선의 발을 각각 H, G<sub>1</sub>이라 하면 두 삼각형 OHN, GG<sub>1</sub>N이 서로 닮은 도형이고  
 $\overline{HN} : \overline{G_1N} = \overline{ON} : \overline{GN} = 3 : 1$ 이므로

$$\overline{G_1N} = \frac{1}{3} \overline{HN} = 1$$

$$\overline{MG_1} = \overline{MN} - \overline{G_1N} = 6 - 1 = 5$$

두 선분 AD, BC의 중점을 각각 X, Y라 하자. 두 점 P, Q에서 평면 ABCD에 내린 수선의 발을 각각 P<sub>1</sub>, Q<sub>1</sub>이라 하고, 평면 OXY에 내린 수선의 발을 각각 P', Q'이라 하면 직선 PQ는 두 평면 GPMQ, ABCD의 교선인 직선 AB에 평행하므로

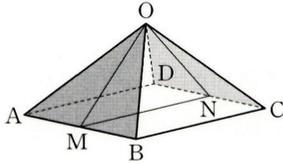
$$\overline{P_1Q_1} = \overline{PQ} = \overline{P'Q'} = 5$$

따라서 사각형 GPMQ의 평면 ABCD 위로의 정사영인 도형 G<sub>1</sub>P<sub>1</sub>MQ<sub>1</sub>의 넓이 S는

$$S = \frac{1}{2} \times \overline{MG_1} \times \overline{P_1Q_1} = \frac{1}{2} \times 5 \times 5 = \frac{25}{2}$$

$$\text{따라서 } 60 \times S = 60 \times \frac{25}{2} = 750$$

2  $\overline{AB} = 4a$  ( $a > 0$ )이라 하자.



조건 (가)에서 두 삼각형 OAB, OCD가 정삼각형이므로 두 선분 AB, CD의 중점을 각각 M, N이라 하면

$$\overline{OM} = \overline{ON} = \frac{\sqrt{3}}{2} \overline{AB} = 2\sqrt{3}a$$

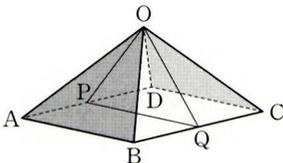
두 직선 AB, CD가 서로 평행하므로 두 평면 OAB, OCD의 교선을 l이라 하면  $l \parallel \overline{AB}$ ,  $l \parallel \overline{CD}$

이때  $\overline{OM} \perp \overline{AB}$ ,  $\overline{ON} \perp \overline{CD}$ 이므로  $\overline{OM} \perp l$ ,  $\overline{ON} \perp l$

조건 (나)에서 두 평면 OAB, OCD가 서로 수직이므로  $\overline{OM} \perp \overline{ON}$

즉,  $\angle MON = \frac{\pi}{2}$ 이고  $\overline{OM} = \overline{ON}$ 이므로

$$\overline{MN} = \sqrt{2} \overline{OM} = 2\sqrt{6}a$$



두 선분 AD, BC의 중점을 각각 P, Q라 하자.

$$\overline{AP} = \frac{1}{2} \overline{AD} = \frac{1}{2} \overline{MN} = \sqrt{6}a$$

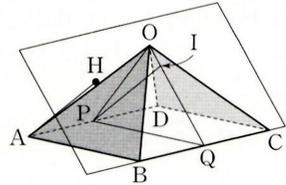
$\overline{OA} = \overline{OD}$ 에서  $\overline{AD} \perp \overline{OP}$ 이므로 직각삼각형 OAP에서

$$\overline{OP} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AP}^2} = \sqrt{(4a)^2 - (\sqrt{6}a)^2} = \sqrt{10}a$$

마찬가지로  $\overline{OQ} = \sqrt{10}a$ 이고  $\overline{PQ} = \overline{AB} = 4a$ 이므로 삼각형 OPQ에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \cos(\angle POQ) &= \frac{\overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2 - \overline{PQ}^2}{2 \times \overline{OP} \times \overline{OQ}} \\ &= \frac{(\sqrt{10}a)^2 + (\sqrt{10}a)^2 - (4a)^2}{2 \times \sqrt{10}a \times \sqrt{10}a} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$\sin(\angle POQ) = \sqrt{1 - \cos^2(\angle POQ)} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$



점 A에서 평면 OBC에 내린 수선의 발을 H, 점 P에서 평면 OBC에 내린 수선의 발을 I라 하면 사각형 AHIP는 직사각형이므로

$$\overline{AH} = \overline{PI} = \overline{OP} \sin(\angle POQ) = \sqrt{10}a \times \frac{2\sqrt{6}}{5} = \frac{4\sqrt{15}}{5}a$$

직선 OA와 평면 OBC가 이루는 예각의 크기  $\theta$ 는

$\theta = \angle AOH$ 이므로

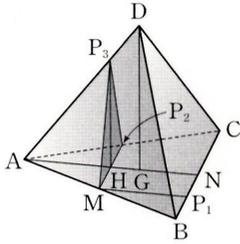
$$\sin \theta = \sin(\angle AOH) = \frac{\overline{AH}}{\overline{OA}} = \frac{\frac{4\sqrt{15}}{5}a}{4a} = \frac{\sqrt{15}}{5}$$

㉕ ㉕

3 서로 평행한 두 직선은 한 평면을 결정하므로 두 직선 AN, MP가 서로 평행하도록 하는 점 P를 P<sub>1</sub>이라 하면 점 P<sub>1</sub>은 직선 AN과 점 M을 포함하는 평면 위의 점이다.

이때 점 M이 선분 AB의 중점이므로 점 P가 선분 BN의 중점일 때, 두 직선 AN, MP는 서로 평행하다. 즉, 점 P<sub>1</sub>은 선분 BN의 중점이다.

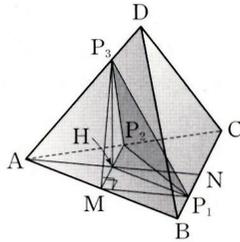
한편,  $\overline{AN} \perp \overline{BC}$ 이고 점 M이 선분 AB의 중점이므로 점 P가 선분 AC의 중점일 때, 두 직선 AN, MP는 서로 수직이다. 이때의 점 P를 P<sub>2</sub>라 하자.



두 직선 AN, MP가 서로 수직이 되도록 하는 점 P 중에서 P<sub>2</sub>가 아닌 점을 P<sub>3</sub>이라 하면 평면 MP<sub>2</sub>P<sub>3</sub>은 직선 AN에 수직이다. 즉, 점 P<sub>3</sub>은 직선 MP<sub>2</sub>를 포함하고 직선 AN에 수직인 평면이 정사면체 ABCD의 모서리와 만나는 점 중 M, P<sub>2</sub>가 아닌 점이고 이 점은 선분 AD 위의 점이다.

점 D에서 평면 ABC에 내린 수선의 발을 G라 하면  $\overline{AN} \perp \overline{DG}$ 이고  $\overline{AN} \perp$ (평면 MP<sub>2</sub>P<sub>3</sub>)이므로 평면 MP<sub>2</sub>P<sub>3</sub>은 직선 DG에 평행하다. 이때 점 G는 삼각형 ABC의 무게 중심과 일치하고,  $\overline{AM} = \overline{AP_2}$ 에서  $\overline{P_3M} = \overline{P_3P_2}$ 이며 점 P<sub>3</sub>에서 평면 ABC에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 선분 MP<sub>2</sub>의 중점과 일치하므로 점 H는 선분 AN 위의 점이다. 이때  $\overline{AM} : \overline{AB} = \overline{AH} : \overline{AN}$ 에서 점 H는 선분 AN의 중점이고, 점 G는 선분 AN을 2 : 1로 내분하는 점이므로  $\overline{AH} : \overline{AG} = 3 : 4$

두 삼각형 AP<sub>3</sub>H, ADG는 서로 닮은 도형이므로  $\overline{AP_3} : \overline{AD} = \overline{AH} : \overline{AG} = 3 : 4$



정사면체 ABCD의 한 모서리의 길이를 4a (a > 0)이라 하면

$$\overline{MP_2} = \frac{1}{2} \overline{BC} = 2a$$

$$\overline{MP_1} = \frac{1}{2} \overline{AN} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \overline{AB} = \sqrt{3}a$$

$\angle P_2MP_1 = \frac{\pi}{2}$ 이므로 직각삼각형 P<sub>2</sub>MP<sub>1</sub>에서

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{\overline{MP_2}^2 + \overline{MP_1}^2} = \sqrt{(2a)^2 + (\sqrt{3}a)^2} = \sqrt{7}a$$

두 삼각형 P<sub>3</sub>AP<sub>2</sub>, P<sub>1</sub>CP<sub>2</sub>는 합동이므로

$$\overline{AP_2} = \overline{CP_2}, \overline{AP_3} = \overline{CP_1}, \angle P_3AP_2 = \angle P_1CP_2 = \frac{\pi}{3}$$

$$\overline{P_3P_2} = \overline{P_1P_2} = \sqrt{7}a$$

또  $\overline{P_3M} = \overline{P_3P_2}$ 이고  $\angle P_3MP_1 = \frac{\pi}{2}$ 이므로 직각삼각형

P<sub>3</sub>MP<sub>1</sub>에서

$$\overline{P_1P_3} = \sqrt{\overline{P_3M}^2 + \overline{MP_1}^2} = \sqrt{(\sqrt{7}a)^2 + (\sqrt{3}a)^2} = \sqrt{10}a$$

삼각형 P<sub>3</sub>P<sub>2</sub>P<sub>1</sub>이  $\overline{P_1P_2} = \overline{P_2P_3}$ 인 이등변삼각형이므로

$$\cos(\angle P_2P_1P_3) = \frac{\frac{1}{2} \overline{P_1P_3}}{\overline{P_1P_2}} = \frac{\frac{1}{2} \times \sqrt{10}a}{\sqrt{7}a} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{14}}$$

$$\begin{aligned} \sin(\angle P_2P_1P_3) &= \sqrt{1 - \cos^2(\angle P_2P_1P_3)} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{14}}\right)^2} = \frac{3}{\sqrt{14}} \end{aligned}$$

삼각형 P<sub>3</sub>P<sub>2</sub>P<sub>1</sub>의 넓이를 S라 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \times \overline{P_1P_2} \times \overline{P_1P_3} \times \sin(\angle P_2P_1P_3) \\ &= \frac{1}{2} \times \sqrt{7}a \times \sqrt{10}a \times \frac{3}{\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{5}}{2}a^2 \end{aligned}$$

한편, 삼각형 P<sub>3</sub>P<sub>2</sub>P<sub>1</sub>의 평면 ABC 위로의 정사영은 삼각형 HP<sub>2</sub>P<sub>1</sub>이므로 삼각형 HP<sub>2</sub>P<sub>1</sub>의 넓이를 S'이라 하면

$$\overline{HP_2} = \frac{1}{2} \overline{MP_2} = a$$

$$S' = \frac{1}{2} \times \overline{HP_2} \times \overline{MP_1} = \frac{1}{2} \times a \times \sqrt{3}a = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$$

평면 P<sub>1</sub>P<sub>2</sub>P<sub>3</sub>과 평면 ABC가 이루는 예각의 크기 θ에 대하여

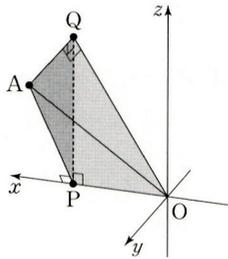
$$\cos^2 \theta = \left(\frac{S'}{S}\right)^2 = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a^2\right)^2}{\left(\frac{3\sqrt{5}}{2}a^2\right)^2} = \frac{1}{15}$$

따라서 p=15, q=1이므로 p+q=15+1=16

# 07 공간좌표

유제					본문 89~97쪽
1 ④	2 ③	3 ④	4 4	5 ⑤	
6 6	7 ③	8 47	9 3	10 ①	

- 1** 점 P는 점 A(3, a, 5)에서 x축에 내린 수선의 발이므로 점 P의 좌표는 (3, 0, 0)  
 점 Q는 점 A에서 zx평면에 내린 수선의 발이므로 점 Q의 좌표는 (3, 0, 5)  
 원점 O의 좌표는 (0, 0, 0)이므로 세 점 O, P, Q의 y좌표는 모두 0이다. 즉, 세 점 O, P, Q는 모두 zx평면 위의 점이다.



이때  $\angle OPQ = \frac{\pi}{2}$ 이므로 삼각형 OPQ의 넓이를 S라 하면  

$$S = \frac{1}{2} \times \overline{OP} \times \overline{PQ} = \frac{1}{2} \times 3 \times 5 = \frac{15}{2}$$
 점 A와 zx평면 사이의 거리가 a이므로 사면체 OAPQ의 부피는  

$$\frac{1}{3} \times S \times a = \frac{1}{3} \times \frac{15}{2} \times a = \frac{5}{2}a$$
 사면체 OAPQ의 부피가 10이므로  

$$\frac{5}{2}a = 10, a = 4$$

답 ④

- 2** 점 A( $\sqrt{3}$ , a, 3)에서 xy평면에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H의 좌표는 ( $\sqrt{3}$ , a, 0)이고  $\overline{AH} = 3$   
 두 점 H( $\sqrt{3}$ , a, 0), O(0, 0, 0)은 xy평면 위의 점이므로  

$$\overline{OH} = \sqrt{(\sqrt{3}-0)^2 + (a-0)^2} = \sqrt{a^2 + 3}$$
 직선 OA와 xy평면이 이루는 예각의 크기는  $\angle AOH$ 와 같으므로  

$$\tan(\angle AOH) = \frac{\overline{AH}}{\overline{OH}} = \frac{3}{\sqrt{a^2 + 3}}$$

직선 OA와 xy평면이 이루는 예각의 크기가  $\frac{\pi}{4}$ 이므로

$$\tan \frac{\pi}{4} = 1 = \frac{3}{\sqrt{a^2 + 3}}$$

에서  $\sqrt{a^2 + 3} = 3, a^2 = 6$   
 $a > 0$ 이므로  $a = \sqrt{6}$

답 ③

- 3** 점 P가 x축 위의 점이므로 점 P의 좌표를 (a, 0, 0)으로 놓을 수 있다.

$\overline{PA} = \overline{PB}$ 에서

$$\sqrt{(3-a)^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{(1-a)^2 + 3^2 + (-4)^2}$$

$$a^2 - 6a + 14 = a^2 - 2a + 26, a = -3$$

즉, 점 P의 좌표는 (-3, 0, 0)이고

$$\overline{PA} = \sqrt{\{3 - (-3)\}^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{41}$$

선분 AB의 중점을 M이라 하면

$$\overline{AM} = \frac{1}{2} \overline{AB} = \frac{1}{2} \sqrt{(1-3)^2 + \{3 - (-1)\}^2 + (-4-2)^2}$$

$$= \sqrt{14}$$

직각삼각형 PAM에서

$$\overline{PM} = \sqrt{\overline{PA}^2 - \overline{AM}^2} = 3\sqrt{3}$$

따라서 삼각형 PAB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{PM} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{14} \times 3\sqrt{3} = 3\sqrt{42}$$

답 ④

- 4** 두 점 A(2, 3, 1), C(-2, 0, a)에서 xy평면에 내린 수선의 발을 각각 A', C'이라 하면 두 점 A', C'의 좌표는 각각 (2, 3, 0), (-2, 0, 0)이므로

$$\overline{AC} = \sqrt{(-2-2)^2 + (0-3)^2 + (a-1)^2}$$

$$= \sqrt{a^2 - 2a + 26}$$

$$\overline{A'C'} = \sqrt{(-2-2)^2 + (0-3)^2} = 5$$

직선 AC가 xy평면과 이루는 예각의 크기가  $\frac{\pi}{4}$ 이므로

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}}, \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5}{\sqrt{a^2 - 2a + 26}}$$

$$\sqrt{2a^2 - 4a + 52} = 10, a^2 - 2a - 24 = 0$$

$$(a-6)(a+4) = 0$$

$a > 0$ 이므로  $a = 6$

즉, 점 C의 좌표가 (-2, 0, 6)이고

$$\overline{BC} = \sqrt{(-2-2)^2 + \{0 - (-2)\}^2 + (6-1)^2} = 3\sqrt{5}$$

또 점 B에서 xy평면에 내린 수선의 발을 B'이라 하면 점 B'의 좌표가 (2, -2, 0)이므로

$$\overline{B'C'} = \sqrt{(-2-2)^2 + \{0 - (-2)\}^2} = 2\sqrt{5}$$

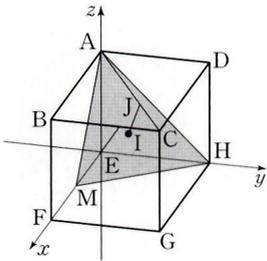
직선 BC가  $xy$ 평면과 이루는 예각의 크기  $\theta$ 에 대하여

$$\cos \theta = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = \frac{2}{3}$$

따라서  $a \times \cos \theta = 6 \times \frac{2}{3} = 4$

답 4

- 5 정육면체 ABCD-EFGH를 좌표공간에 점 E가 원점과 일치하고 세 반직선 EF, EH, EA가 각각  $x$ 축,  $y$ 축,  $z$ 축의 양의 방향과 일치하도록 놓으면 그림과 같다.



두 점 E, F의 좌표가 각각  $(0, 0, 0)$ ,  $(6, 0, 0)$ 이므로 선분 EF의 중점 M의 좌표는  $(3, 0, 0)$

두 점 A, H의 좌표가 각각  $(0, 0, 6)$ ,  $(0, 6, 0)$ 이므로 삼각형 AMH의 무게중심 I의 좌표는

$$\left( \frac{0+3+0}{3}, \frac{0+0+6}{3}, \frac{6+0+0}{3} \right), \text{ 즉 } (1, 2, 2)$$

또 점 C의 좌표가  $(6, 6, 6)$ 이므로 선분 AC를 2:1로 내분하는 점 J의 좌표는

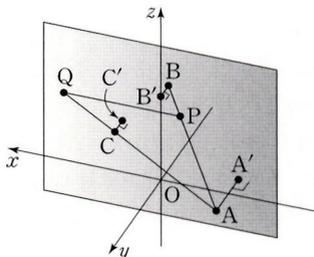
$$\left( \frac{2 \times 6 + 1 \times 0}{2+1}, \frac{2 \times 6 + 1 \times 0}{2+1}, \frac{2 \times 6 + 1 \times 6}{2+1} \right), \text{ 즉}$$

$$(4, 4, 6)$$

따라서  $\overline{IJ} = \sqrt{(4-1)^2 + (4-2)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{29}$

답 5

- 6 세 점  $A(-4, 3, 1)$ ,  $B(0, -1, 5)$ ,  $C(2, 1, 3)$ 에서  $zx$ 평면에 내린 수선의 발을 각각  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ 이라 하면 세 점  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ 의 좌표는 각각  $(-4, 0, 1)$ ,  $(0, 0, 5)$ ,  $(2, 0, 3)$ 이고  $\overline{AA'}=3$ ,  $\overline{BB'}=1$ ,  $\overline{CC'}=1$



이때 점 P는  $zx$ 평면 위의 점이므로

$$\overline{AP} : \overline{BP} = \overline{AA'} : \overline{BB'} = 3 : 1$$

두 점 A, B의  $y$ 좌표의 부호가 서로 반대이므로 점 P는 선분 AB를 3:1로 내분하는 점이다.

따라서 점 P의 좌표는

$$\left( \frac{3 \times 0 + 1 \times (-4)}{3+1}, \frac{3 \times (-1) + 1 \times 3}{3+1}, \frac{3 \times 5 + 1 \times 1}{3+1} \right),$$

$$\text{즉 } (-1, 0, 4)$$

한편, 점 Q는  $zx$ 평면 위의 점이므로

$$\overline{AQ} : \overline{CQ} = \overline{AA'} : \overline{CC'} = 3 : 1$$

두 점 A, C의  $y$ 좌표의 부호가 서로 같으므로 점 Q는 선분 AC를 3:1로 외분하는 점이다.

따라서 점 Q의 좌표는

$$\left( \frac{3 \times 2 - 1 \times (-4)}{3-1}, \frac{3 \times 1 - 1 \times 3}{3-1}, \frac{3 \times 3 - 1 \times 1}{3-1} \right), \text{ 즉}$$

$$(5, 0, 4)$$

그러므로 선분 PQ의 길이는

$$\sqrt{\{5 - (-1)\}^2 + \{(0-0)\}^2 + \{(4-4)\}^2} = 6$$

답 6

- 7 구의 중심을 C라 하면 점 C는 선분 AB의 중점이므로 점 C의 좌표는

$$\left( \frac{-1+3}{2}, \frac{2+0}{2}, \frac{4+2}{2} \right), \text{ 즉 } (1, 1, 3)$$

이때

$$\overline{AC} = \sqrt{\{1 - (-1)\}^2 + \{(1-2)\}^2 + \{(3-4)\}^2} = \sqrt{6}$$

이므로 이 구의 방정식은

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 6 \quad \dots \textcircled{1}$$

점 P는  $z$ 축 위의 점이므로 점 P의 좌표는  $(0, 0, a)$ 로 놓을 수 있고, 점 P가 구  $\textcircled{1}$  위의 점이므로

$$(0-1)^2 + (0-1)^2 + (a-3)^2 = 6$$

$$(a-3)^2 = 4, a-3 = \pm 2$$

$$a=1 \text{ 또는 } a=5$$

즉, 점 P의 좌표를  $(0, 0, 1)$ 이라 하면 점 Q의 좌표는

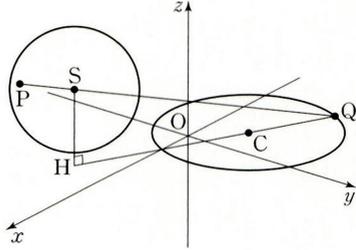
$$(0, 0, 5) \text{ 이므로}$$

$$\overline{OP} \times \overline{OQ} = 1 \times 5 = 5$$

답 3

- 8  $x^2 + y^2 + z^2 - 12x + 4y - 8z + k = 0$ 에서  $(x-6)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 56 - k$

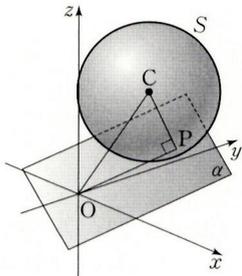
이므로 이 구는 중심의 좌표가  $(6, -2, 4)$ 이고 반지름의 길이가  $\sqrt{56-k}$ 인 구이다. 이 구의 중심을 S라 하자.  
 두 점 P, Q 사이의 거리가 최대이려면 점 S는 선분 PQ 위에 있고, 이때 두 점 S, Q 사이의 거리가 최대이어야 한다.  
 또 점 S에서  $xy$ 평면에 내린 수선의 발을 H라 할 때,  $\overline{SH}=4$  (일정)이므로 두 점 S, Q 사이의 거리가 최대이려면 두 점 H, Q 사이의 거리가 최대이어야 한다.



점 S(6, -2, 4)에서  $xy$ 평면에 내린 수선의 발 H의 좌표는  $(6, -2, 0)$   
 원  $(x+2)^2+(y-2)^2=20$ 의 중심을 C라 하면 점 C의 좌표는  $(-2, 2, 0)$ 이고 반지름의 길이는  $2\sqrt{5}$ 이며  
 $\overline{CH}=\sqrt{\{6-(-2)\}^2+(-2-2)^2}=4\sqrt{5}$   
 점 C가 선분 QH 위에 있을 때 두 점 H, Q 사이의 거리는 최대이고, 이때  
 $\overline{HQ}=\overline{CH}+\overline{CQ}=4\sqrt{5}+2\sqrt{5}=6\sqrt{5}$   
 한편,  $\overline{SH}=4$ 이므로 이때 직각삼각형 SHQ에서  
 $\overline{SQ}=\sqrt{\overline{SH}^2+\overline{HQ}^2}=\sqrt{4^2+(6\sqrt{5})^2}=14$   
 즉, 두 점 P, Q 사이의 거리의 최댓값은  
 $\overline{SP}+\overline{SQ}=\sqrt{56-k}+14$   
 두 점 P, Q 사이의 거리의 최댓값이 17이므로  
 $\sqrt{56-k}+14=17, \sqrt{56-k}=3$   
 $k=47$

답 47

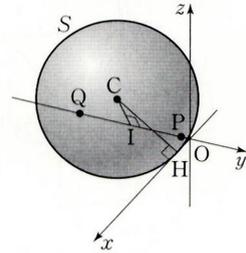
9



점 P는 구 S 위의 점이므로  $\overline{CP}=2$   
 직선 CP는 평면  $\alpha$ 와 수직이므로  $\overline{OP} \perp \overline{CP}$   
 직각삼각형 COP에서  
 $\overline{OC}^2=\overline{CP}^2+\overline{OP}^2=2^2+3^2=13$   
 이때  $\overline{OC}=\sqrt{1^2+a^2+3^2}=\sqrt{a^2+10}$ 이므로  
 $a^2+10=13, a^2=3$

답 3

10



점 C(2, -4, a)에서  $x$ 축에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 점 H의 좌표는  $(2, 0, 0)$   
 구 S가  $x$ 축과 한 점에서만 만나므로 이 구의 반지름의 길이는 선분 CH의 길이와 같다. 즉,  $\overline{CH}=5$ 에서  
 $\overline{CH}=\sqrt{(2-2)^2+\{0-(-4)\}^2+(0-a)^2}$   
 $=\sqrt{a^2+16}=5$   
 $a>0$ 이므로  $a=3$   
 점 C(2, -4, 3)에서  $y$ 축에 내린 수선의 발을 I라 할 때, 점 I의 좌표는  $(0, -4, 0)$   
 $\overline{CI}=\sqrt{(0-2)^2+\{-4-(-4)\}^2+(0-3)^2}=\sqrt{13}$   
 구 S가  $y$ 축과 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하면  
 $\overline{CP}=5$ 이므로 직각삼각형 CIP에서  
 $\overline{PI}=\sqrt{\overline{CP}^2-\overline{CI}^2}=\sqrt{5^2-(\sqrt{13})^2}=2\sqrt{3}$   
 점 I는 선분 PQ의 중점이므로 구 S가  $y$ 축과 만나는 두 점 P, Q 사이의 거리는  
 $\overline{PQ}=2\overline{PI}=4\sqrt{3}$

답 ①

다른 풀이

좌표공간의 점 C(2, -4, a)를 중심으로 하고 반지름의 길이가 5인 구 S의 방정식은  
 $(x-2)^2+(y+4)^2+(z-a)^2=25$   
 구 S가  $x$ 축과 만나는 점의 좌표를  $(x_1, 0, 0)$ 이라 하면  
 $(x_1-2)^2+(0+4)^2+(0-a)^2=25$   
 $x_1^2-4x_1+a^2-5=0 \dots \dots \textcircled{1}$

구 S가 x축과 한 점에서만 만나므로  $x_1$ 에 대한 이차방정식 ①의 서로 다른 실근의 개수는 1이다. ①의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4} = (-2)^2 - (a^2 - 5) = -a^2 + 9 = 0$$

$a > 0$ 이므로  $a = 3$

즉, 구 S의 방정식은

$$(x-2)^2 + (y+4)^2 + (z-3)^2 = 25$$

구 S가 y축과 만나는 점의 좌표를  $(0, y_1, 0)$ 이라 하면

$$(0-2)^2 + (y_1+4)^2 + (0-3)^2 = 25$$

$$(y_1+4)^2 = 12$$

$$y_1 = -4 - 2\sqrt{3} \text{ 또는 } y_1 = -4 + 2\sqrt{3}$$

따라서 구 S가 y축과 만나는 두 점의 좌표는 각각

$$(0, -4 - 2\sqrt{3}, 0), (0, -4 + 2\sqrt{3}, 0)$$

이므로 두 점 사이의 거리는

$$|-4 + 2\sqrt{3} - (-4 - 2\sqrt{3})| = 4\sqrt{3}$$

$$a^2 + 11 = 16, a^2 = 5$$

$$a > 0 \text{이므로 } a = \sqrt{5}$$

답 ⑤

3 점  $B(0, 0, 2)$ 를  $xy$ 평면에 대하여 대칭이동한 점을  $B'$ 이라 하면 점  $B'$ 의 좌표는  $(0, 0, -2)$

점 P가 선분  $AB'$ 과  $xy$ 평면의 교점일 때  $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 값이 최소이다. 즉,  $xy$ 평면 위의 점  $P_1$ 은 선분  $AB'$  위의 점이다. 두 점 A, B'에서  $xy$ 평면에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하면

$$\overline{AP_1} : \overline{B'P_1} = \overline{AH} : \overline{B'I} = 1 : 2$$

즉, 점  $P_1$ 은 선분  $AB'$ 을 1 : 2로 내분하는 점이므로 점  $P_1$ 의 좌표는

$$\left( \frac{1 \times 0 + 2 \times 4}{1+2}, \frac{1 \times 0 + 2 \times (-3)}{1+2}, \frac{1 \times (-2) + 2 \times 1}{1+2} \right),$$

$$\text{즉 } \left( \frac{8}{3}, -2, 0 \right)$$

따라서  $a = \frac{8}{3}, b = -2, c = 0$ 이므로

$$a + b + c = \frac{8}{3} + (-2) + 0 = \frac{2}{3}$$

답 ②

참고

점 I는 원점이다.

4 좌표공간의 세 점  $A(4, 0, -1), B(0, 0, 3), C(2, a, b)$ 에 대하여 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는

$$\left( \frac{4+0+2}{3}, \frac{0+0+a}{3}, \frac{-1+3+b}{3} \right), \text{ 즉}$$

$$\left( 2, \frac{a}{3}, \frac{b+2}{3} \right)$$

이 점이  $xy$ 평면 위의 점이므로  $\frac{b+2}{3} = 0, b = -2$

즉, 점 G의 좌표는  $\left( 2, \frac{a}{3}, 0 \right)$ 이다. 이때  $\overline{AG} = \sqrt{6}$ 이므로

$$\overline{AG} = \sqrt{(2-4)^2 + \left( \frac{a}{3} - 0 \right)^2 + \{0 - (-1)\}^2}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2}{9} + 5} = \sqrt{6}$$

$$\frac{a^2}{9} = 1, a^2 = 9$$

따라서

$$\overline{BC} = \sqrt{(2-0)^2 + (a-0)^2 + (-2-3)^2}$$

$$= \sqrt{a^2 + 29} = \sqrt{38}$$

답 ⑤

Level 1 기초 연습

본문 98~99쪽

1 ①	2 ⑤	3 ②	4 ⑤	5 ④
6 ③	7 19	8 ③		

1 점 P는 점  $A(4, -2, 1)$ 에서  $yz$ 평면에 내린 수선의 발이므로 점 P의 좌표는  $(0, -2, 1)$

점 Q는 점 A를 원점에 대하여 대칭이동시킨 점이므로 점 Q의 좌표는  $(-4, 2, -1)$

따라서 선분 PQ의 길이는

$$\overline{PQ} = \sqrt{(-4-0)^2 + \{2 - (-2)\}^2 + (-1-1)^2} = 6$$

답 ①

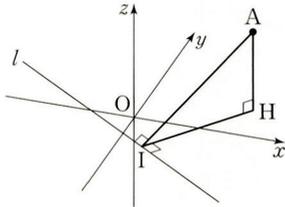
2 점 P는 점  $A(\sqrt{2}, a, 3)$ 을 x축에 대하여 대칭이동한 점이므로 점 P의 좌표는  $(\sqrt{2}, -a, -3)$

점 Q는 점 P를  $yz$ 평면에 대하여 대칭이동한 점이므로 점 Q의 좌표는  $(-\sqrt{2}, -a, -3)$

$\overline{AQ} = 8$ 이므로

$$\overline{AQ} = \sqrt{(-\sqrt{2}-\sqrt{2})^2 + (-a-a)^2 + (-3-3)^2} = 2\sqrt{a^2 + 11} = 8$$

5



점 A(4, 2, a)에서 xy평면에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H의 좌표는 (4, 2, 0)이고 a>0이므로  $\overline{AH}=a$

점 H에서 직선 l에 내린 수선의 발을 I라 하자. 선분 HI의 길이는 xy평면 위의 점 H(4, 2)와 직선

l: 3x+4y+5=0 사이의 거리와 같으므로

$$\overline{HI} = \frac{|3 \times 4 + 4 \times 2 + 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 5$$

삼수선의 정리에 의하여  $\overline{AI} \perp l$ 이므로 점 A와 직선 l 사이의 거리는 선분 AI의 길이와 같고  $\overline{AI}=6$ 이다.

이때 직각삼각형 AHI에서

$$\overline{AI} = \sqrt{\overline{AH}^2 + \overline{HI}^2} = \sqrt{a^2 + 5^2} = \sqrt{a^2 + 25} = 6$$

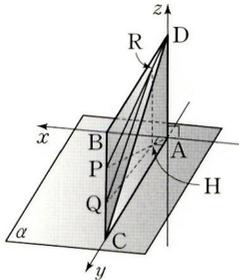
$$a^2 = 11$$

$$a > 0 \text{ 이므로 } a = \sqrt{11}$$

답 ④

6  $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$ ,  $\overline{AD} \perp \alpha$ 이므로 사면체 ABCD를 좌표공간

에 점 A가 원점과 일치하고 세 반직선 AB, AC, AD가 각각 x축, y축, z축의 양의 방향과 일치하도록 놓으면 그림과 같다.



이때  $\overline{AB}=6$ ,  $\overline{AC}=12$ 이므로 세 점 A, B, C의 좌표는 각각 (0, 0, 0), (6, 0, 0), (0, 12, 0)이고, 양수 a에 대하여 점 D의 좌표를 (0, 0, a)로 놓을 수 있다.

점 P는 선분 BC를 1:2로 내분하는 점이므로 점 P의 좌표는

$$\left( \frac{1 \times 0 + 2 \times 6}{1+2}, \frac{1 \times 12 + 2 \times 0}{1+2}, \frac{1 \times 0 + 2 \times 0}{1+2} \right), \text{ 즉}$$

$$(4, 4, 0)$$

$$\overline{AP} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$$

이므로 직선 PD와 평면  $\alpha$ 가 이루는 각의 크기  $\theta_1$ 에 대하여

$$\tan \theta_1 = \frac{\overline{AD}}{\overline{AP}} = \frac{a}{4\sqrt{2}}$$

또 점 Q는 선분 BC를 2:1로 내분하는 점이므로 점 Q의 좌표는

$$\left( \frac{2 \times 0 + 1 \times 6}{2+1}, \frac{2 \times 12 + 1 \times 0}{2+1}, \frac{2 \times 0 + 1 \times 0}{2+1} \right), \text{ 즉}$$

$$(2, 8, 0)$$

점 R은 선분 PD를 3:1로 내분하는 점이므로 점 R의 좌표는

$$\left( \frac{3 \times 0 + 1 \times 4}{3+1}, \frac{3 \times 0 + 1 \times 4}{3+1}, \frac{3 \times a + 1 \times 0}{3+1} \right), \text{ 즉}$$

$$\left( 1, 1, \frac{3}{4}a \right)$$

점 R에서 xy평면에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H의 좌표는 (1, 1, 0)

$$\overline{QH} = \sqrt{(1-2)^2 + (1-8)^2} = 5\sqrt{2}$$

$$\overline{RH} = \frac{3}{4}a$$

이므로 직선 QR과 평면  $\alpha$ 가 이루는 각의 크기  $\theta_2$ 에 대하여

$$\tan \theta_2 = \frac{\overline{RH}}{\overline{QH}} = \frac{\frac{3}{4}a}{5\sqrt{2}} = \frac{3a}{20\sqrt{2}}$$

$$\tan \theta_1 \times \tan \theta_2 = \frac{9}{10} \text{ 이므로}$$

$$\tan \theta_1 \times \tan \theta_2 = \frac{a}{4\sqrt{2}} \times \frac{3a}{20\sqrt{2}} = \frac{3a^2}{160} = \frac{9}{10}$$

$$a^2 = \frac{9}{10} \times \frac{160}{3} = 16 \times 3, a = 4\sqrt{3}$$

따라서 선분 AD의 길이는  $4\sqrt{3}$ 이다.

답 ③

7 선분 AB가 지름의 양 끝점이므로 이 구의 반지름의 길이 r에 대하여

$$2r = \overline{AB}$$

$$= \sqrt{\{-1 - (-5)\}^2 + \{k - (-1)\}^2 + (2-0)^2}$$

$$= \sqrt{k^2 + 2k + 21} \quad \dots \text{ ㉠}$$

선분 AB의 중점을 C라 하면 점 C의 좌표는

$$\left( \frac{-5-1}{2}, \frac{-1+k}{2}, \frac{0+2}{2} \right), \text{ 즉 } \left( -3, \frac{k-1}{2}, 1 \right)$$

이 구가 원점을 지나므로  $r = \overline{CO}$ 이다. 즉,

$$r = \overline{CO} = \sqrt{(-3)^2 + \left(\frac{k-1}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{k^2}{4} - \frac{k}{2} + \frac{41}{4}}$$

$$2r = \sqrt{\frac{k^2}{4} - \frac{k}{2} + \frac{41}{4}} = \sqrt{k^2 - 2k + 41} \quad \dots \textcircled{L}$$

㉠, ㉡에서

$$\sqrt{k^2 + 2k + 21} = \sqrt{k^2 - 2k + 41}$$

$$4k = 20, k = 5$$

㉠에 대입하여 정리하면

$$2r = \sqrt{5^2 + 2 \times 5 + 21} = 2\sqrt{14}$$

$$r = \sqrt{14}$$

$$\text{따라서 } k + r^2 = 5 + 14 = 19$$

답 19

**다른 풀이**

선분 AB를 지름으로 하는 원이 원점을 지나므로 원점 O에 대하여  $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$

$$\text{즉, } \overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{BO}^2$$

이때

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 &= \{-1 - (-5)\}^2 + \{k - (-1)\}^2 + (2-0)^2 \\ &= k^2 + 2k + 21 \end{aligned}$$

$$\overline{AO}^2 = (-5)^2 + (-1)^2 + 0^2 = 26$$

$$\overline{BO}^2 = (-1)^2 + k^2 + 2^2 = k^2 + 5$$

이므로

$$k^2 + 2k + 21 = 26 + k^2 + 5$$

$$2k = 10, k = 5$$

한편,

$$r = \frac{1}{2} \overline{AB} = \frac{1}{2} \sqrt{k^2 + 2k + 21} = \frac{1}{2} \sqrt{5^2 + 2 \times 5 + 21} = \sqrt{14}$$

$$\text{따라서 } k + r^2 = 5 + 14 = 19$$

8  $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax + 2ay - 2az = 0$ 에서

$$(x-a)^2 + (y+a)^2 + (z-a)^2 = 3a^2$$

이므로 이 구는 중심의 좌표가  $(a, -a, a)$ 이고 반지름의 길이가  $\sqrt{3}a$ 인 구이다.

구의 중심  $(a, -a, a)$ 로부터  $xy$ 평면,  $yz$ 평면,  $zx$ 평면까지의 거리가 모두  $a$ 로 같으므로 이 구가  $xy$ 평면,  $yz$ 평면,  $zx$ 평면과 만나서 생기는 세 원의 넓이는 모두 같다.

이 세 원의 넓이의 합이  $\pi$ 이므로 이 구와  $xy$ 평면이 만나서 생기는 원의 넓이는  $\frac{\pi}{3}$ 이고 이 원의 반지름의 길이는  $\sqrt{\frac{1}{3}}$ 이다.

구의 중심을 C라 하고 점 C에서  $xy$ 평면에 내린 수선의 발을 H라 하자. 이 구가 원점 O를 지나므로

$$\overline{CO} = \sqrt{3}a, \overline{CH} = a, \overline{OH} = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

이고 직각삼각형 COH에서

$$\overline{CO}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{OH}^2$$

$$3a^2 = a^2 + \frac{1}{3}, a^2 = \frac{1}{6}, a = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

답 ③

Level

**2 기본 연습** 분문 100~101쪽

1 ③	2 ⑤	3 ②	4 36	5 ②
6 ④	7 27	8 37		

1 점 P는 점  $A(a, -\sqrt{15}, a)$ 를  $x$ 축에 대하여 대칭이동시킨 점이므로 점 P의 좌표는  $(a, \sqrt{15}, -a)$ 이고 직선 AP는  $x$ 축에 수직이다.

점 Q는 점 A를  $yz$ 평면에 대하여 대칭이동시킨 점이므로 점 Q의 좌표는  $(-a, -\sqrt{15}, a)$ 이고 직선 AQ는  $yz$ 평면에 수직이다.

이때  $x$ 축이  $yz$ 평면에 수직이므로 두 직선 AP, AQ는 수직이다. 즉,  $\angle PAQ = \frac{\pi}{2}$

$$\cos(\angle AQP) = \frac{\sqrt{5}}{5} \text{에서}$$

$$\sin(\angle AQP) = \sqrt{1 - \cos^2(\angle AQP)} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \text{이므로}$$

$$\tan(\angle AQP) = \frac{\sin(\angle AQP)}{\cos(\angle AQP)} = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}}{\frac{\sqrt{5}}{5}} = 2 \quad \dots \textcircled{1}$$

이때

$$\begin{aligned} \overline{AP} &= \sqrt{(a-a)^2 + \{\sqrt{15} - (-\sqrt{15})\}^2 + (-a-a)^2} \\ &= 2\sqrt{a^2 + 15} \end{aligned}$$

$$\overline{AQ} = \sqrt{(-a-a)^2 + \{-\sqrt{15} - (-\sqrt{15})\}^2 + (a-a)^2} = 2a$$

이므로 ①에서

$$\tan(\angle AQP) = \frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}} = \frac{\sqrt{a^2 + 15}}{a} = 2$$

$$\sqrt{a^2 + 15} = 2a, 3a^2 = 15, a = \sqrt{5}$$

즉,  $\overline{AP} = 2\sqrt{a^2 + 15} = 4\sqrt{5}$ ,  $\overline{AQ} = 2a = 2\sqrt{5}$ 이므로 삼각형 APQ의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AP} \times \overline{AQ} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{5} \times 2\sqrt{5} = 20$$

답 ③

2 조건 (가)에서 점 P가  $xy$ 평면 위의 점이므로 점 P의 좌표를  $(a, b, 0)$ 으로 놓을 수 있다. 이때

$$\overline{AP}^2 = \{a - (-2)\}^2 + \{b - 4\}^2 + \{0 - (-8)\}^2 = a^2 + b^2 + 4a - 8b + 84$$

$$\overline{BP}^2 = (a-4)^2 + \{b - (-2)\}^2 + (0-4)^2 = a^2 + b^2 - 8a + 4b + 36$$

조건 (나)에서  $\overline{AP} = \overline{BP}$ 이므로  $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 에서

$$a^2 + b^2 + 4a - 8b + 84 = a^2 + b^2 - 8a + 4b + 36$$

$$a - b + 4 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

즉, 점 P는  $xy$ 평면의 직선  $x - y + 4 = 0$  위의 점이다. 이 직선을  $l$ 이라 하자.

한편, 점 A에서  $xy$ 평면에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H의 좌표는  $(-2, 4, 0)$

$\overline{AP}$ 의 값이 최소가 되도록 하는 점 P가 Q이므로

$$\overline{AQ} \perp l$$

이때  $\overline{AH} \perp (xy\text{평면})$ 이므로 삼수선의 정리에 의하여

$$\overline{HQ} \perp l$$

$xy$ 평면 위의 점  $H(-2, 4)$ 를 지나고 직선  $l$ 과 수직으로 만나는 직선의 방정식은

$$y = -(x+2) + 4, \text{ 즉 } x + y - 2 = 0$$

위의 직선의 방정식과 직선  $l$ 의 방정식  $x - y + 4 = 0$ 을 연립하여 풀면  $x = -1, y = 3$

따라서 점 Q의 좌표는  $(-1, 3, 0)$ 이므로

$$\overline{OQ} = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

답 ⑤

**다른 풀이**

조건 (가)에서 점 P가  $xy$ 평면 위의 점이므로 점 P의 좌표를  $(a, b, 0)$ 으로 놓을 수 있다. 이때

$$\overline{AP}^2 = \{a - (-2)\}^2 + \{b - 4\}^2 + \{0 - (-8)\}^2 = a^2 + b^2 + 4a - 8b + 84$$

$$\overline{BP}^2 = (a-4)^2 + \{b - (-2)\}^2 + (0-4)^2 = a^2 + b^2 - 8a + 4b + 36$$

조건 (나)에서  $\overline{AP} = \overline{BP}$ 이므로  $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 에서

$$a^2 + b^2 + 4a - 8b + 84 = a^2 + b^2 - 8a + 4b + 36$$

$$a - b + 4 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①에서  $b = a + 4$ 이므로

$$\overline{AP}^2 = a^2 + b^2 + 4a - 8b + 84$$

$$= a^2 + (a+4)^2 + 4a - 8(a+4) + 84$$

$$= 2a^2 + 4a + 68 = 2(a+1)^2 + 66$$

따라서  $\overline{AP}^2$ 의 값이 최소가 되도록 하는 실수  $a$ 의 값은  $-1$ 이다.  $a = -1$ 을 ①에 대입하면

$$b = a + 4 = -1 + 4 = 3$$

따라서 점 Q의 좌표는  $(-1, 3, 0)$ 이므로

$$\overline{OQ} = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

3 네 점 A, B, C, D를  $xy$ 평면 위의 점

$(0, 0, 0), (4, 0, 0), (4, 4, 0), (0, 4, 0)$

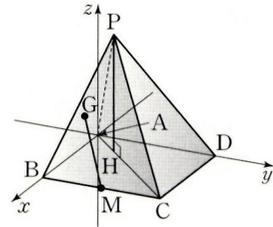
으로 놓으면 선분 AC를 1 : 3으로 내분하는 점의 좌표는

$$\left( \frac{1 \times 4 + 3 \times 0}{1+3}, \frac{1 \times 4 + 3 \times 0}{1+3}, \frac{1 \times 0 + 3 \times 0}{1+3} \right), \text{ 즉}$$

$$(1, 1, 0)$$

이 점을 H라 하자.

이때 사각뿔 P-ABCD의 높이가 4이고 점 P에서 평면 ABCD에 내린 수선의 발이 점 H와 같으므로 점 P의 좌표는  $(1, 1, 4)$ 로 놓을 수 있다.



이때 삼각형 PAB의 무게중심 G의 좌표는

$$\left( \frac{1+0+4}{3}, \frac{1+0+0}{3}, \frac{4+0+0}{3} \right), \text{ 즉 } \left( \frac{5}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3} \right)$$

이고, 선분 BC의 중점 M의 좌표는

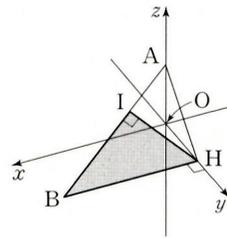
$$\left( \frac{4+4}{2}, \frac{0+4}{2}, \frac{0+0}{2} \right), \text{ 즉 } (4, 2, 0)$$

따라서 선분 GM의 길이는

$$\begin{aligned} \overline{GM} &= \sqrt{\left(4 - \frac{5}{3}\right)^2 + \left(2 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(0 - \frac{4}{3}\right)^2} \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{7^2 + 5^2 + (-4)^2} = \sqrt{10} \end{aligned}$$

답 ②

4



원점 O에 대하여  $\overline{AO} \perp (xy\text{평면})$ 이고  $\overline{OH} \perp \overline{BH}$ 이므로 삼수선의 정리에 의하여

$$\overline{AH} \perp \overline{BH}$$

즉, 삼각형 ABH는  $\angle AHB = \frac{\pi}{2}$  인 직각삼각형이다.

이때  $\overline{HI} \perp \overline{AB}$ 이므로 두 직각삼각형 AIH, HIB는 서로 닮음이다. 즉,  $\overline{AI} : \overline{IH} = \overline{HI} : \overline{IB}$ 이므로

$$\overline{HI}^2 = \overline{AI} \times \overline{BI}$$

조건 (가)에서 점 I가 선분 AB를 1 : 2로 내분하므로

$$\overline{AI} = k \ (k > 0) \text{으로 놓으면 } \overline{BI} = 2k \text{이고}$$

$$\overline{HI}^2 = \overline{AI} \times \overline{BI} = k \times 2k = 2k^2, \overline{HI} = \sqrt{2}k$$

이므로 삼각형 BHI의 넓이를 S라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times \overline{BI} \times \overline{HI} = \frac{1}{2} \times 2k \times \sqrt{2}k = \sqrt{2}k^2$$

한편,  $\overline{AH} \perp \overline{BH}$ 이므로 평면 BHI와  $xy$ 평면이 이루는 각의 크기는  $\angle AHO$ 와 같다.

직각삼각형 AIH에서

$$\overline{AH} = \sqrt{\overline{AI}^2 + \overline{HI}^2} = \sqrt{k^2 + (\sqrt{2}k)^2} = \sqrt{3}k$$

이고  $\overline{OA} = 3$ 이므로 직각삼각형 AOH에서

$$\overline{OH} = \sqrt{\overline{AH}^2 - \overline{OA}^2} = \sqrt{(\sqrt{3}k)^2 - 3^2} = \sqrt{3k^2 - 9}$$

$$\text{따라서 } \cos(\angle AHO) = \frac{\overline{OH}}{\overline{AH}} = \frac{\sqrt{3k^2 - 9}}{\sqrt{3}k} = \frac{\sqrt{k^2 - 3}}{k}$$

조건 (나)에서 삼각형 BHI의  $xy$ 평면 위로의 정사영의 넓이가  $2\sqrt{5}$ 이므로

$$\begin{aligned} S \times \cos(\angle AHO) &= \sqrt{2}k^2 \times \frac{\sqrt{k^2 - 3}}{k} \\ &= \sqrt{2} \times k\sqrt{k^2 - 3} = 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$k\sqrt{k^2 - 3} = \sqrt{10}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$k^4 - 3k^2 - 10 = 0, (k^2 + 2)(k^2 - 5) = 0$$

$$k > 0 \text{이므로 } k = \sqrt{5}$$

$$\text{즉, } \overline{OH} = \sqrt{3k^2 - 9} = \sqrt{6}$$

한편, 두 삼각형 AIH, HIB의 닮음비는

$$\overline{AI} : \overline{HI} = k : \sqrt{2}k = 1 : \sqrt{2} \text{이므로}$$

$$\overline{AH} : \overline{BH} = 1 : \sqrt{2} \text{에서}$$

$$\overline{BH} = \sqrt{2} \times \overline{AH} = \sqrt{2} \times \sqrt{3}k = \sqrt{30}$$

따라서 점 B의 좌표가  $(\sqrt{30}, \sqrt{6}, 0)$ 이므로

$$a = \sqrt{30}, b = \sqrt{6} \text{이고}$$

$$a^2 + b^2 = (\sqrt{30})^2 + (\sqrt{6})^2 = 36$$

☞ 36

- 5 방정식  $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z = 0$ 에  $x = y = z = 0$ 을 대입하면 성립하므로 구 S는 원점 O를 지난다.

또  $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 6$ 이므로 구 S의 중심을 C라 하면 점 C의 좌표는  $(2, -1, 1)$ 이고 반지름의 길이는  $\sqrt{6}$ 이다.

평면  $\alpha$ 가 구 S 위의 두 점 O, A를 지나므로 평면  $\alpha$ 가 구 S와 만나서 생기는 원을 C라 하면 선분 OA는 원 C의 현이다. 이 현이 원 C의 지름일 때, 원 C의 넓이는 최소이다.

$\overline{OA} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}$ 이므로 선분 OA가 지름인 원의 넓이는

$$\left(\frac{\overline{OA}}{2}\right)^2 \pi = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 \pi = \frac{3}{2}\pi$$

$$\text{따라서 } m = \frac{3}{2}\pi$$

한편, 평면  $\alpha$ 가 구 S의 중심 C를 지날 때, 원 C의 넓이가 최대이고 이 원의 반지름의 길이는 구 S의 반지름의 길이와 같으므로

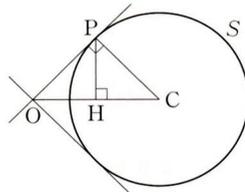
$$M = (\sqrt{6})^2 \pi = 6\pi$$

$$\text{따라서 } M + m = 6\pi + \frac{3}{2}\pi = \frac{15}{2}\pi$$

☞ ②

- 6 조건에서 직선 OP는 구 S와 점 P에서만 만나므로 직선 OP는 구 S 위의 점 P에서 접한다. 즉,  $\overline{OP} \perp \overline{CP}$

$$\text{이때 } \overline{OC} = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + (\sqrt{5})^2} = 3\sqrt{2}$$



점 P에서 선분 OC에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 P가 나타내는 도형은 점 H를 중심으로 하고 반지름의 길이가  $\overline{PH}$ 인 원이다. 이 원의 둘레의 길이가  $3\sqrt{2}\pi$ 이므로 원의 반지름의 길이는  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 이다. 즉,  $\overline{PH} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

구 S의 반지름의 길이를 r이라 하면  $\overline{CP} = r$ 이고 직각삼각형 POC에서

$$\overline{OP} = \sqrt{\overline{OC}^2 - \overline{CP}^2} = \sqrt{18 - r^2}$$

$$\overline{OP} \times \overline{CP} = \overline{OC} \times \overline{PH} \text{이므로}$$

$$r\sqrt{18 - r^2} = 3\sqrt{2} \times \frac{3\sqrt{2}}{2} = 9$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$r^2(18 - r^2) = 81, r^4 - 18r^2 + 81 = 0$$

$$(r^2 - 9)^2 = 0, r^2 = 9$$

$$r > 0 \text{ 이므로 } r = 3$$

구의 중심 C에서  $xy$ 평면에 내린 수선의 발을 I라 하면

$$\overline{CI} = \sqrt{5}$$

구 S가  $xy$ 평면과 만나서 생기는 원의 반지름의 길이를 R이라 하면

$$R = \sqrt{r^2 - \overline{CI}^2} = \sqrt{3^2 - (\sqrt{5})^2} = 2$$

따라서 구 S가  $xy$ 평면과 만나서 생기는 원의 넓이는  $2^2\pi = 4\pi$

답 ④

7 조건 (가)에서 평면 PAO가  $xy$ 평면에 수직이고 두 점 A, O는  $x$ 축 위의 점이므로 점 P는  $zx$ 평면 위의 점이다. 즉, 점 P의  $y$ 좌표는 0이다.

조건 (나)에서 삼각형 PAO가 정삼각형이므로 삼각형 PAO의 무게중심을 G라 하면 점 G는 삼각형 PAO의 외접원의 중심이다.

선분 OA의 중점을 M이라 하면  $\overline{OA} \perp \overline{CM}$ 이므로 두 점 C, M의  $x$ 좌표는 서로 같다. 즉, 점 M의 좌표는  $(a, 0, 0)$

이때  $a > 0$ 이고  $\overline{OA} = 2\overline{OM} = 2a$ 이며 조건 (나)에서 정삼각형 PAO의 넓이가  $9\sqrt{3}$ 이므로

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times \overline{OA}^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (2a)^2 = 9\sqrt{3}$$

$$a^2 = 9\sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = 9, a = 3$$

한편, 점 G는 구의 중심 C에서 평면 PAO에 내린 수선의 발과 일치하고 평면 PAO는  $zx$ 평면이므로 점 G는 점 C에서  $zx$ 평면에 내린 수선의 발과 같다.

즉, 점 G의 좌표는  $(3, 0, b)$ , 이때 점 M의 좌표는  $(3, 0, 0)$ 이고

$$\overline{PM} = \frac{\sqrt{3}}{2} \overline{OA} = 3\sqrt{3}, \overline{GM} = \frac{1}{3} \overline{PM} = \sqrt{3}$$

$$b > 0 \text{ 이므로 } b = \sqrt{3}$$

$$\text{따라서 } a^2 \times b^2 = 3^2 \times (\sqrt{3})^2 = 27$$

답 27

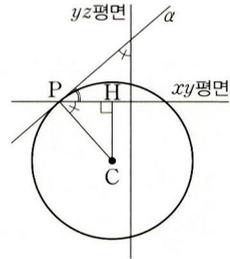
8 구 S의 중심을 C라 하면 점 C의 좌표는  $(1, 2, -3)$   
점 C에서  $xy$ 평면에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H의 좌표는  $(1, 2, 0)$

구 S의 반지름의 길이가 4이므로 원 C 위의 점 P에 대하여  $\overline{CP} = 4$ 이고  $\overline{CH} = 3$ 이므로 직각삼각형 CHP에서

$$\overline{HP} = \sqrt{\overline{CP}^2 - \overline{CH}^2} = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$$

즉, 원 C의 반지름의 길이가  $\sqrt{7}$ 이므로 원 C의 넓이는  $(\sqrt{7})^2\pi = 7\pi$

한편, 평면 CHP는  $y$ 축에 수직이므로 평면 CHP에 의해 잘린 단면은 그림과 같다.



$\angle CPH = \theta$ 라 하면  $\sin \theta = \frac{\overline{CH}}{\overline{CP}} = \frac{3}{4}$ 이고  $\overline{CP} \perp \alpha$ 이므로

평면  $\alpha$ 와  $xy$ 평면이 이루는 각의 크기는  $\frac{\pi}{2} - \theta$ 이다. 따라서 원 C의 평면  $\alpha$  위로의 정사영  $C_1$ 의 넓이는

$$7\pi \times \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = 7\pi \times \sin \theta = 7\pi \times \frac{3}{4} = \frac{21}{4}\pi$$

또  $xy$ 평면과  $yz$ 평면이 서로 수직이므로 평면  $\alpha$ 와  $yz$ 평면이 이루는 각의 크기는  $\theta$ 이다.

이때  $\cos \theta = \frac{\overline{HP}}{\overline{CP}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$ 이므로 도형  $C_1$ 의  $yz$ 평면 위로의 정사영의 넓이는

$$\frac{21}{4}\pi \times \cos \theta = \frac{21}{4}\pi \times \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{21\sqrt{7}}{16}\pi$$

따라서  $p = 16, q = 21$ 이므로

$$p + q = 16 + 21 = 37$$

답 37

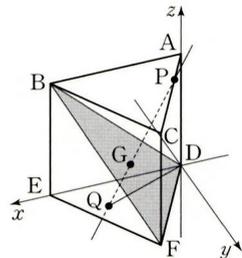
Level

3
실력 완성

본문 102쪽

1 ④
2 26
3 288

1



그림과 같이 세 점 D, A, E가 각각 좌표공간의 점  
 $(0, 0, 0)$ ,  $(0, 0, 6)$ ,  $(6, 0, 0)$

과 일치하도록 삼각기둥 ABC-DEF를 좌표공간에 놓으  
 면 세 점 B, C, F의 좌표는 각각

$$(6, 0, 6), (3, 3\sqrt{3}, 6), (3, 3\sqrt{3}, 0)$$

삼각형 BFD의 무게중심 G의 좌표는

$$\left(\frac{6+3+0}{3}, \frac{0+3\sqrt{3}+0}{3}, \frac{6+0+0}{3}\right), \text{ 즉 } (3, \sqrt{3}, 2)$$

선분 AC를 1 : 2로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times 3 + 2 \times 0}{1+2}, \frac{1 \times 3\sqrt{3} + 2 \times 0}{1+2}, \frac{1 \times 6 + 2 \times 6}{1+2}\right), \text{ 즉}$$

$$(1, \sqrt{3}, 6)$$

점 Q는 직선 PG가 평면 DEF와 만나는 점이므로 이 점의  
 $z$ 좌표는 0이고, 점 Q는 선분 PG의 연장선 위의 점이다.

이때 두 점 P, G에서  $xy$ 평면에 내린 수선의 발을 각각  $P'$ ,  
 $G'$ 이라 하면  $\overline{PP'}=6, \overline{GG'}=2$ 이고

$$\overline{PQ} : \overline{GQ} = \overline{PP'} : \overline{GG'} = 6 : 2 = 3 : 1$$

이므로 점 Q는 선분 PG를 3 : 1로 외분하는 점이다. 즉, 점  
 Q의 좌표는

$$\left(\frac{3 \times 3 - 1 \times 1}{3-1}, \frac{3 \times \sqrt{3} - 1 \times \sqrt{3}}{3-1}, \frac{3 \times 2 - 1 \times 6}{3-1}\right), \text{ 즉}$$

$$(4, \sqrt{3}, 0)$$

$$\text{따라서 } \overline{QD} = \sqrt{4^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{19}$$

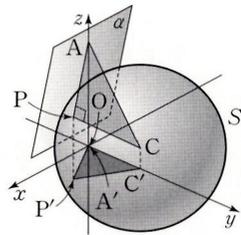
㉔ ④

2 점 A는  $z$ 축 위의 점이므로 점 A에서  $xy$ 평면에 내린 수선  
 의 발을  $A'$ 이라 하면 점  $A'$ 은 원점이다. 또 점 C에서  $xy$ 평  
 면에 내린 수선의 발을  $C'$ 이라 하면 점  $C'$ 의 좌표는  
 $(0, 4, 0)$ 이다.

점 P에서  $xy$ 평면에 내린 수선의 발을  $P'$ 이라 하자. 조건  
 (가)에서 삼각형 APC의  $xy$ 평면 위로의 정사영이 정삼각형  
 이고  $\overline{A'C'}=4$ 이므로 삼각형  $A'P'C'$ 은 한 변의 길이가 4인  
 정삼각형이다. 따라서 점 P의  $x$ 좌표가 양수라고 가정하면  
 점 P'의 좌표는  $(2\sqrt{3}, 2, 0)$ 이고 실수  $p$ 에 대하여 점 P의  
 좌표를  $(2\sqrt{3}, 2, p)$ 로 놓을 수 있다.

한편, 점 P에서 구 S에 접하는 평면을  $\alpha$ 라 하면  $\alpha \perp \overline{PC}$ 이  
 고 두 점 A, P가 평면  $\alpha$  위의 점이므로  $\overline{AP} \perp \overline{PC}$

따라서 삼각형 APC는  $\angle APC = \frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형이다.  
 이때 조건 (가)에서 삼각형 APC가 이등변삼각형이므로 삼  
 각형 APC는  $\overline{AP} = \overline{PC}$ 이고  $\angle APC = \frac{\pi}{2}$ 인 직각이등변삼  
 각형이다.



점 P를 지나고  $z$ 축에 수직인 평면이  $z$ 축과 만나는 점을  $A_1$ ,  
 직선  $CC'$ 과 만나는 점을  $C_1$ 이라 하면

$$\overline{PA_1} = \overline{P'A'} = 4, \overline{PC_1} = \overline{P'C'} = 4$$

에서  $\overline{PA_1} = \overline{PC_1}$ 이고  $\angle AA_1P = \frac{\pi}{2}, \angle CC_1P = \frac{\pi}{2}$ 이다.

이때  $\overline{AP} = \overline{PC}$ 이므로 두 직각삼각형  $APA_1, CPC_1$ 에서

$$\overline{AA_1} = \sqrt{\overline{AP}^2 - \overline{PA_1}^2} = \sqrt{\overline{PC}^2 - \overline{PC_1}^2} = \overline{CC_1}$$

즉, 점 P에서  $yz$ 평면에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는  
 선분 AC의 중점이다.

삼각형 APC가  $\angle APC = \frac{\pi}{2}$ 인 직각이등변삼각형이므로

$$\overline{PH} = \overline{AH} = \frac{1}{2} \overline{AC}$$

이때  $\overline{PH} = |2\sqrt{3} - 0| = 2\sqrt{3}$ 이므로

$$\overline{AC} = 2\overline{PH} = 4\sqrt{3} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

조건 (나)에서 점 A의  $z$ 좌표가  $5\sqrt{2}$ 이므로 점 A의 좌표는  
 $(0, 0, 5\sqrt{2})$

점 C의 좌표가  $(0, 4, k)$ 이므로  $\textcircled{1}$ 에서

$$\overline{AC} = \sqrt{(0-0)^2 + (4-0)^2 + (k-5\sqrt{2})^2}$$

$$= \sqrt{(k-5\sqrt{2})^2 + 16} = 4\sqrt{3}$$

$$(k-5\sqrt{2})^2 = 32$$

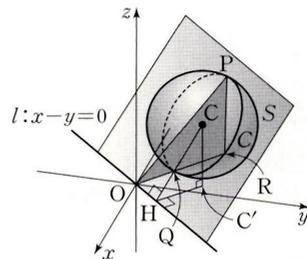
$$k < 5\sqrt{2} \text{ 이므로 } k-5\sqrt{2} = -4\sqrt{2}, k = \sqrt{2}$$

$$\text{한편, } \overline{PC} = r \text{ 이므로 } r = \overline{PC} = \frac{\sqrt{2}}{2} \overline{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 4\sqrt{3} = 2\sqrt{6}$$

$$\text{따라서 } k^2 + r^2 = (\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{6})^2 = 26$$

㉔ 26

3



구 S의 중심을 C라 하고 점 C에서  $xy$ 평면에 내린 수선의 발을  $C'$ 이라 하면 두 점 C,  $C'$ 의 좌표는 각각

$$(-1, 5, 4\sqrt{2}), (-1, 5, 0)$$

$xy$ 평면 위의 직선  $x-y=0$ 을  $l$ 이라 하자. 점 C에서 직선  $l$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼수선의 정리에 의하여  $\overline{CH} \perp l$

$xy$ 평면에서 직선  $l$ 의 기울기가 1이므로 직선  $\overline{CH}$ 는 점  $(-1, 5)$ 를 지나고 기울기가  $-1$ 인 직선이다. 이 직선의 방정식을 구하면

$$x+y=4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

직선  $l$ 이 직선  $\textcircled{1}$ 과 만나는 점이 H이므로 연립하여 점 H의 좌표를 구하면  $(2, 2, 0)$ 이고

$$\overline{CH} = \sqrt{\{2 - (-1)\}^2 + \{2 - 5\}^2 + \{0 - 4\sqrt{2}\}^2} = 5\sqrt{2}$$

직선  $l$ 을 포함하고 구의 중심 C를 지나는 평면을  $\alpha$ 라 하자. 평면  $\alpha$ 가 구 S와 만나서 생기는 원 C 위의 점 중에서  $z$ 좌표가 최소인 점은 원 C 위의 점과 직선  $x-y=0$  사이의 거리가 최소인 점이므로 점 Q는 선분 CH와 원 C의 교점이다. 마찬가지로 점 P는 직선 CH와 원 C의 교점 중에서 Q가 아닌 점이다.

이때 선분 CQ의 길이는 구 S의 반지름의 길이와 같으므로  $\overline{CQ} = 3\sqrt{2}$

즉, 점 Q는 선분 CH를 3 : 2로 내분하는 점과 같으므로 점 Q의 좌표는

$$\left( \frac{3 \times 2 + 2 \times (-1)}{3+2}, \frac{3 \times 2 + 2 \times 5}{3+2}, \frac{3 \times 0 + 2 \times 4\sqrt{2}}{3+2} \right).$$

$$\approx \left( \frac{4}{5}, \frac{16}{5}, \frac{8\sqrt{2}}{5} \right)$$

한편, 점 O가 평면  $\alpha$  위의 점이므로 직선 OQ는 평면  $\alpha$  위의 직선이고, 직선 OQ가 구 S와 만나는 점 중 Q가 아닌 점 R은 원 C 위의 점이다.

$$\overline{CQ} = 3\sqrt{2} \text{이고}$$

$$\overline{OH} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}, \overline{HQ} = \overline{CH} - \overline{CQ} = 2\sqrt{2}$$

에서  $\angle OHQ = \frac{\pi}{2}$ 이므로 삼각형 QOH는  $\overline{OH} = \overline{QH}$ 인 직각이등변삼각형이다.

즉,  $\angle OQH = \frac{\pi}{4}$ 이므로  $\angle CQR = \frac{\pi}{4}$  (맞꼭지각)이다.

$$\overline{QR} = 2 \times \overline{CQ} \times \cos \frac{\pi}{4} = 6$$

삼각형 COR의 넓이는 삼각형 COQ의 넓이의  $\frac{5}{2}$ 배이고,

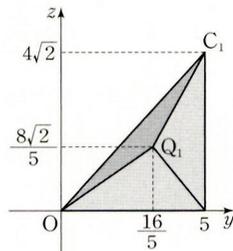
삼각형 POR의 넓이는 삼각형 COR의 넓이의 2배이므로 삼각형 POR의 넓이는 삼각형 COQ의 넓이의 5배이다.

한편, 네 점 C, P, Q, R의  $yz$ 평면 위로의 정사영을 각각

$C_1, P_1, Q_1, R_1$ 이라 하면 삼각형 POR의  $yz$ 평면 위로의 정사영은 삼각형  $P_1OR_1$ 이고,

$$\overline{OQ} : \overline{OR} = \overline{OQ_1} : \overline{OR_1}, \overline{CQ} : \overline{CP} = \overline{C_1Q_1} : \overline{C_1P_1}$$

이므로 삼각형  $P_1OR_1$ 의 넓이는 삼각형  $C_1OQ_1$ 의 넓이의 5배이다.



두 점  $C_1, Q_1$ 의 좌표가 각각  $(0, 5, 4\sqrt{2}), (0, \frac{16}{5}, \frac{8\sqrt{2}}{5})$

이므로 삼각형  $C_1OQ_1$ 의 넓이를  $k_1$ 이라 하면

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{1}{2} \times 5 \times 4\sqrt{2} - \frac{1}{2} \times 5 \times \frac{8\sqrt{2}}{5} - \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times \left(5 - \frac{16}{5}\right) \\ &= 10\sqrt{2} - 4\sqrt{2} - \frac{18\sqrt{2}}{5} = \frac{12\sqrt{2}}{5} \end{aligned}$$

따라서  $k = 5k_1 = 12\sqrt{2}$ 이므로

$$k^2 = (12\sqrt{2})^2 = 288$$