수능특강

수학영역 **미적분**

정답과 풀이

01 수열의 극한

유제

본문 5~9쪽

1 ④ 2 ④ 3 ② 4 ② 5 ④
6 ③

1 ㄱ. $a_n \times a_{n+1} = (-2)^n \times (-2)^{n+1}$

$= \{(-1)^n \times 2^n\} \times \{(-1)^{n+1} \times 2^{n+1}\}$

$= -2^{2n+1}$

이므로 n의 값이 한없이 커질 때, $a_n \times a_{n+1}$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커진다.

즉, $\lim_{n\to\infty}(a_n \times a_{n+1}) = -\infty$

ㄴ. $2^{a_1} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2}$, $2^{a_3} = 2^{-8} = \frac{1}{2^8}$, $2^{a_5} = 2^{-32} = \frac{1}{2^{32}}$, $\cdots$

이므로 n의 값이 한없이 커질 때, $2^{a_{2n-1}}$의 값은 0에 한없이 가까워진다.

즉, $\lim_{n\to\infty} 2^{a_{2n-1}} = 0$

ㄷ. $a_{2n} = (-2)^{2n} = (-1)^{2n} \times 2^{2n} = 2^{2n}$

$a_{2n+1} = (-2)^{2n+1} = (-1)^{2n+1} \times 2^{2n+1} = -2^{2n+1}$

이므로 n의 값이 한없이 커질 때, $\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}}$의 값은 -2로 일정하다.

즉, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = -2$

이상에서 수렴하는 수열은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

2 $(2n-1)a_n = b_n$이라 하면 $\lim_{n\to\infty} b_n = 2$이므로

$\lim_{n\to\infty} b_{2n} = 2$, $\lim_{n\to\infty} b_{2n+1} = 2$

따라서

$\lim_{n\to\infty}\{(4n-1)(a_{2n}+a_{2n+1})+2a_{2n+1}\}$

$= \lim_{n\to\infty}\{(4n-1)a_{2n}+(4n+1)a_{2n+1}\}$

$= \lim_{n\to\infty}(b_{2n}+b_{2n+1})$

$= \lim_{n\to\infty} b_{2n} + \lim_{n\to\infty} b_{2n+1}$

$= 2+2$

$= 4$

답 ④

3 $\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{9+\frac{2}{n}}-3\right) = \lim_{n\to\infty}\left(n \times \frac{\frac{2}{n}}{\sqrt{9+\frac{2}{n}}+3}\right)$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{9+\frac{2}{n}}+3}$

$= \frac{2}{3+3} = \frac{1}{3}$

답 ②

4 $na_n - \frac{n}{2} < 2n^2 b_n < na_n + \frac{n}{2}$의 각 변을 n^2으로 나누면

$\frac{a_n}{n} - \frac{1}{2n} < 2b_n < \frac{a_n}{n} + \frac{1}{2n}$

이때 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n} - \frac{1}{2n}\right) = 4$, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n} + \frac{1}{2n}\right) = 4$이므로

수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty} 2b_n = 4$

따라서

$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} \times 2b_n\right) = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} 2b_n = \frac{1}{2} \times 4 = 2$

답 ②

5 $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{-n+1}+3^{-n-1}}{\frac{1}{2^n}+\left(\frac{1}{3}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}$

$= \frac{2+\frac{1}{3}\times 0}{1+0}$

$= 2$

답 ④

6 $\lim_{n\to\infty} \frac{a^{2n-1}+a^{-2n+1}}{a^{2n+1}+a^{-2n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{a}\times(a^2)^n + a\times\left(\frac{1}{a^2}\right)^n}{a\times(a^2)^n + \frac{1}{a}\times\left(\frac{1}{a^2}\right)^n}$

(i) $0 < a < 1$일 때

$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{a}\times(a^2)^n + a\times\left(\frac{1}{a^2}\right)^n}{a\times(a^2)^n + \frac{1}{a}\times\left(\frac{1}{a^2}\right)^n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{a}\times(a^4)^n+a}{a\times(a^4)^n+\frac{1}{a}}$$

$$=\frac{\frac{1}{a}\times0+a}{a\times0+\frac{1}{a}}$$

$$=a^2=\frac{1}{4}$$

이때 $0<a<1$이므로 $a=\frac{1}{2}$

(ii) $a=1$일 때

$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{2n-1}+a^{-2n+1}}{a^{2n+1}+a^{-2n-1}}=\frac{1+1}{1+1}=1$

이므로 조건을 만족시키지 못한다.

(iii) $a>1$일 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{a}\times(a^2)^n+a\times\left(\frac{1}{a^2}\right)^n}{a\times(a^2)^n+\frac{1}{a}\times\left(\frac{1}{a^2}\right)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{a}+a\times\left(\frac{1}{a^4}\right)^n}{a+\frac{1}{a}\times\left(\frac{1}{a^4}\right)^n}$$

$$=\frac{\frac{1}{a}+a\times0}{a+\frac{1}{a}\times0}$$

$$=\frac{1}{a^2}=\frac{1}{4}$$

이때 $a>1$이므로 $a=2$

(i), (ii), (iii)에서 모든 양수 a의 값의 합은

$\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$

답 ③

Level 1 기초 연습

본문 10쪽

1 ① 2 ⑤ 3 ② 4 ⑤

1 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=2$, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n(3a_n+1)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}\times\frac{3a_n+1}{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{a_n}{n}\times\left(3\times\frac{a_n}{n}+\frac{1}{n}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}\times\left(3\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)$$

$$=2\times(3\times2+0)$$

$$=12$$

답 ①

2 $\lim_{n\to\infty}\frac{an+3}{4n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a+\frac{3}{n}}{4}=\frac{a}{4}$이므로

$\frac{a}{4}=2$에서 $a=8$

이때

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+an}-n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+8n}-n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+8n}-n)(\sqrt{n^2+8n}+n)}{\sqrt{n^2+8n}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{8n}{\sqrt{n^2+8n}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{8}{\sqrt{1+\frac{8}{n}}+1}$$

$$=\frac{8}{1+1}=4$$

이므로 $b=4$

따라서 $a+b=8+4=12$

답 ⑤

3 첫째항이 2이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{2^{n-2}}$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4^n\times a_n-1}{3\times2^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n\times\frac{1}{2^{n-2}}-1}{3\times2^{n+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+2}-1}{3\times2^{n+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}$$

$$=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\times0$$

$$=\frac{2}{3}$$

답 ②

4 수열 $\left\{\left(\frac{x+2}{5}\right)^{2n}\right\}$은 첫째항과 공비가 모두 $\left(\frac{x+2}{5}\right)^2$인 등비수열이므로 이 수열이 수렴할 조건은

$-1<\left(\frac{x+2}{5}\right)^2\leq 1$

모든 정수 x에 대하여 $\left(\frac{x+2}{5}\right)^2\geq 0$이므로

$\left(\frac{x+2}{5}\right)^2\leq 1$

을 만족시키면 된다.

$-1\leq\frac{x+2}{5}\leq 1$에서

$-5\leq x+2\leq 5$

$-7\leq x\leq 3$

따라서 구하는 정수 x의 최댓값은 3, 최솟값은 -7이므로 최댓값과 최솟값의 합은 -4이다.

답 ⑤

Level 2 기본 연습

본문 11쪽

1 ③	2 ①	3 ③	4 ①

1 (i) $\sum_{k=1}^{n} a_k=2n(n+1)$에서

$n=1$일 때,

$a_1=\sum_{k=1}^{1} a_k=2\times 1\times 2=4$

$n\geq 2$일 때,

$$\begin{aligned}a_n&=\sum_{k=1}^{n} a_k-\sum_{k=1}^{n-1} a_k\\&=2n(n+1)-2(n-1)n\\&=4n\end{aligned}$$

즉, 모든 자연수 n에 대하여

$a_n=4n$

(ii) $\sum_{k=1}^{n} a_kb_k=n^2(n+1)$에서

$n=1$일 때,

$a_1b_1=\sum_{k=1}^{1} a_kb_k=1\times 2=2$

$n\geq 2$일 때,

$$\begin{aligned}a_nb_n&=\sum_{k=1}^{n} a_kb_k-\sum_{k=1}^{n-1} a_kb_k\\&=n^2(n+1)-(n-1)^2n\\&=n(3n-1)\end{aligned}$$

즉, 모든 자연수 n에 대하여

$a_nb_n=n(3n-1)$

(i), (ii)에서 $a_n=4n$, $b_n=\frac{3n-1}{4}$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3n-1}{4}}{4n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{16n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{1}{n}}{16}\\&=\frac{3}{16}\end{aligned}$$

답 ③

2 조건 (가)에서 각 변을 n^2으로 나누면

$\frac{5n^2+2n}{n^2}<\frac{4na_n+b_n}{n^2}<\frac{5n^2+4n+1}{n^2}$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+2n}{n^2}=5$, $\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+4n+1}{n^2}=5$이므로

수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty}\frac{4na_n+b_n}{n^2}=5$

한편, 조건 (나)에 의하여

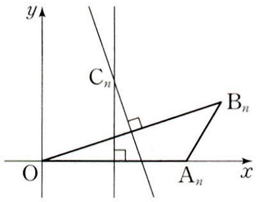
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{4na_n}{n^2}&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4na_n}{n^2}\times\frac{3n+4}{2n^2+n}\times\frac{2n^2+n}{3n+4}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(3n+4)a_n}{2n^2+n}\times\frac{4n(2n^2+n)}{n^2(3n+4)}\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(3n+4)a_n}{2n^2+n}\times\frac{8n^2+4n}{3n^2+4n}\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+4)a_n}{2n^2+n}\times\lim_{n\to\infty}\frac{8n^2+4n}{3n^2+4n}\\&=\frac{1}{2}\times\lim_{n\to\infty}\frac{8+\frac{4}{n}}{3+\frac{4}{n}}\\&=\frac{1}{2}\times\frac{8}{3}\\&=\frac{4}{3}\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n^2}&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4na_n+b_n}{n^2}-\frac{4na_n}{n^2}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{4na_n+b_n}{n^2}-\lim_{n\to\infty}\frac{4na_n}{n^2}\\&=5-\frac{4}{3}\\&=\frac{11}{3}\end{aligned}$$

답 ①

3



선분 OA_n의 수직이등분선은 직선 $x=1-\frac{k}{2n}$이다.

또 선분 OB_n의 중점의 좌표는 $\left(1,\ \frac{1}{2n}\right)$이고, 직선 OB_n의 기울기가 $\frac{1}{2n}$이므로 선분 OB_n의 수직이등분선의 방정식은

$y-\frac{1}{2n}=-2n(x-1)$

$y=-2nx+2n+\frac{1}{2n}$

삼각형의 외접원의 중심은 세 변의 수직이등분선이 만나는 점이므로 두 직선 $x=1-\frac{k}{2n}$, $y=-2nx+2n+\frac{1}{2n}$이 만나는 점을 C_n이라 하면 삼각형 OA_nB_n의 외접원의 중심은 점 C_n이다.

$y=-2n\left(1-\frac{k}{2n}\right)+2n+\frac{1}{2n}=k+\frac{1}{2n}$에서

$C_n\left(1-\frac{k}{2n},\ k+\frac{1}{2n}\right)$

이때 $R_n=\overline{OC_n}$이므로

$$R_n=\sqrt{\left(1-\frac{k}{2n}\right)^2+\left(k+\frac{1}{2n}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{k^2+1}{4n^2}+k^2+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}R_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{k^2+1}{4n^2}+k^2+1}$$
$$=\sqrt{0+k^2+1}$$
$$=\sqrt{k^2+1}$$

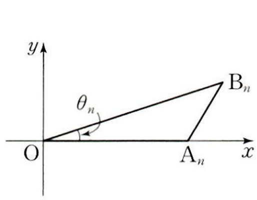
따라서 $\sqrt{k^2+1}=\frac{5}{4}$에서 $k^2=\frac{9}{16}$

$k>0$이므로 $k=\frac{3}{4}$

답 ③

다른 풀이

직선 OB_n의 기울기가 $\frac{1}{2n}$이므로 $\angle B_nOA_n=\theta_n$이라 하면



$\tan\theta_n=\frac{1}{2n}$

$1+\tan^2\theta_n=\frac{1}{\cos^2\theta_n}$에서

$$\cos^2\theta_n=\frac{1}{1+\tan^2\theta_n}=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{2n}\right)^2}=\frac{4n^2}{4n^2+1}$$

$$\sin^2\theta_n=1-\cos^2\theta_n=1-\frac{4n^2}{4n^2+1}=\frac{1}{4n^2+1}$$

$\sin\theta_n>0$이므로 $\sin\theta_n=\frac{1}{\sqrt{4n^2+1}}$

이때 삼각형 OA_nB_n에서

$$\overline{A_nB_n}=\sqrt{\left(\frac{k}{n}\right)^2+\left(\frac{1}{n}\right)^2}=\frac{\sqrt{k^2+1}}{n}$$

이고, 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{A_nB_n}}{\sin\theta_n}=2R_n$$

$$\frac{\frac{\sqrt{k^2+1}}{n}}{\frac{1}{\sqrt{4n^2+1}}}=2R_n$$

$$R_n=\frac{\sqrt{4n^2+1}\times\sqrt{k^2+1}}{2n}$$

$$\lim_{n\to\infty}R_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^2+1}\times\sqrt{k^2+1}}{2n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}\times\sqrt{k^2+1}}{2}$$
$$=\frac{2\times\sqrt{k^2+1}}{2}$$
$$=\sqrt{k^2+1}$$

따라서 $\sqrt{k^2+1}=\frac{5}{4}$에서 $k^2=\frac{9}{16}$

$k>0$이므로 $k=\frac{3}{4}$

4 $n=\log_2 x$에서 $x=2^n$이므로

$P_n(2^n,\ n)$

$n=\log_3(x-1)$에서 $x=3^n+1$이므로

$Q_n(3^n+1,\ n)$

즉, $\overline{P_nQ_n}=3^n-2^n+1$

또 $A(1,\ 0)$, $B(2,\ 0)$이고 사각형 P_nABQ_n은 사다리꼴이므로

$$S_n=\frac{1}{2}\times(\overline{AB}+\overline{P_nQ_n})\times n$$
$$=\frac{1}{2}\times\{1+(3^n-2^n+1)\}\times n$$
$$=\frac{n(3^n-2^n+2)}{2}$$

$S_{n+1}=\frac{(n+1)(3^{n+1}-2^{n+1}+2)}{2}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}}{n\times\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)(3^{n+1}-2^{n+1}+2)}{2}}{n(3^n-2^n+1)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(3^{n+1}-2^{n+1}+2)}{2n(3^n-2^n+1)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2n}\times\frac{3^{n+1}-2^{n+1}+2}{3^n-2^n+1}\right)$$

이때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}-2^{n+1}+2}{3^n-2^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n+2\times\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n}=3$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}}{n\times\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}\times\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}-2^{n+1}+2}{3^n-2^n+1}$$
$$=\frac{1}{2}\times 3$$
$$=\frac{3}{2}$$

답 ①

Level 3 실력 완성 본문 12쪽

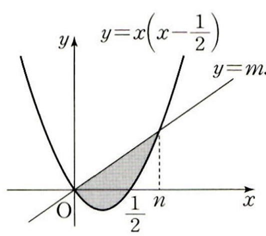
1 ③ 2 ② 3 ①

1 곡선 $y=x\left(x-\frac{1}{2}\right)$과 직선 $y=mx$가 만나는 점 중 원점이 아닌 점의 x좌표가 자연수 n이므로

$n\left(n-\frac{1}{2}\right)=mn$

$n-\frac{1}{2}=m$

$n=\frac{1}{2}+m$ ...... ㉠



이때 곡선 $y=x\left(x-\frac{1}{2}\right)$과 직선 $y=mx$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$S_n=\int_0^n\left\{mx-x\left(x-\frac{1}{2}\right)\right\}dx$$
$$=\int_0^n\left\{-x^2+\left(\frac{1}{2}+m\right)x\right\}dx$$
$$=\int_0^n(-x^2+nx)\,dx\ (\text{㉠에 의하여})$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{n}{2}x^2\right]_0^n$$
$$=-\frac{n^3}{3}+\frac{n^3}{2}$$
$$=\frac{n^3}{6}$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+1}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+1}{\frac{n^3}{6}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{6}}$$
$$=\frac{1+0}{\frac{1}{6}}$$
$$=6$$

답 ③

2 $\left(\frac{1+i}{2}\right)^n=a_n+b_n\times i$에서

$\left(\frac{1+i}{2}\right)^{n+1}=a_{n+1}+b_{n+1}\times i$이고

$$\left(\frac{1+i}{2}\right)^{n+1}=\left(\frac{1+i}{2}\right)^n\times\frac{1+i}{2}$$
$$=(a_n+b_n\times i)\times\frac{1+i}{2}$$
$$=\frac{a_n-b_n}{2}+\frac{a_n+b_n}{2}i$$

이므로

$a_{n+1}=\frac{a_n-b_n}{2}$, $b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$

이때

$$a_{n+1}^2+b_{n+1}^2=\left(\frac{a_n-b_n}{2}\right)^2+\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)^2$$
$$=\frac{1}{2}(a_n^2+b_n^2)$$

이고 $\frac{1+i}{2}=a_1+b_1\times i$에서 $a_1=b_1=\frac{1}{2}$이므로 수열 $\{a_n^2+b_n^2\}$은 공비가 $\frac{1}{2}$, 첫째항이 $\frac{1}{2}$인 등비수열이다.

즉, $a_n^2+b_n^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^n$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{{a_{n+1}}^2+{b_{n+1}}^2+\left(\frac{1}{6}\right)^n}{{a_n}^2+{b_n}^2+\left(\frac{1}{3}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\left(\frac{1}{6}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}+0}{1+0}$$

$$=\frac{1}{2}$$

답 ②

3 $\overline{PQ}=\overline{PR}$에서 $\overline{PQ}^2=\overline{PR}^2$

$\overline{PQ}^2=(n-t)^2+(n^\alpha-0)^2=(n-t)^2+n^{2\alpha}$,

$\overline{PR}^2=(n-0)^2+\{n^\alpha-(-\alpha+1)n^\alpha\}^2=n^2+\alpha^2n^{2\alpha}$

이므로

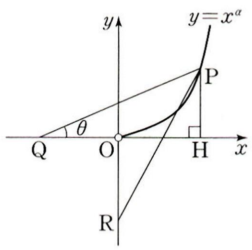
$(n-t)^2+n^{2\alpha}=n^2+\alpha^2n^{2\alpha}$에서

$(n-t)^2=n^2+(\alpha^2-1)n^{2\alpha}$

$n-t>0$이므로

$n-t=\sqrt{n^2+(\alpha^2-1)n^{2\alpha}}$

또한 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.



$\tan\theta=\frac{\overline{PH}}{\overline{HQ}}=\frac{n^\alpha}{n-t}=\frac{n^\alpha}{\sqrt{n^2+(\alpha^2-1)n^{2\alpha}}}$

그런데 $\lim_{n\to\infty}\theta=\frac{\pi}{4}$이면 $\lim_{n\to\infty}\tan\theta=1$이고 $\alpha>1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^\alpha}{\sqrt{n^2+(\alpha^2-1)n^{2\alpha}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^{2\alpha-2}}+\alpha^2-1}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}}=1$$

따라서 $\sqrt{\alpha^2-1}=1$에서 $\alpha^2=2$이고

$\alpha>1$이므로 $\alpha=\sqrt{2}$

답 ①

02 급수

유제 본문 15~19쪽

1 ②	**2** ②	**3** 18	**4** ④	**5** ①
6 30				

1 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}-\frac{n+1}{n+2}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{k+1}-\frac{k+1}{k+2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{3}{4}-\frac{4}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{n}{n+1}-\frac{n+1}{n+2}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{n+1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}$$

$$=\frac{1}{2}-\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}$$

$$=\frac{1}{2}-1$$

$$=-\frac{1}{2}$$

답 ②

2 $a_n={}_{n+2}C_2=\frac{(n+2)(n+1)}{2}$이므로

$\frac{1}{2a_n}=\frac{1}{(n+2)(n+1)}$

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$=\frac{1}{2}-0$

$=\frac{1}{2}$

답 ②

3 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+\frac{3n}{n+2}\right)$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\left(a_n+\frac{3n}{n+2}\right)=0$

또 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-4)$가 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}(b_n-4)=0$

이때

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}a_n&=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(a_n+\frac{3n}{n+2}\right)-\frac{3n}{n+2}\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\left(a_n+\frac{3n}{n+2}\right)-\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{n+2}\\&=\lim_{n\to\infty}\left(a_n+\frac{3n}{n+2}\right)-\lim_{n\to\infty}\frac{3}{1+\frac{2}{n}}\\&=0-3\\&=-3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}b_n&=\lim_{n\to\infty}\{(b_n-4)+4\}\\&=\lim_{n\to\infty}(b_n-4)+\lim_{n\to\infty}4\\&=0+4\\&=4\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(a_n+6)(b_n+2)&=\lim_{n\to\infty}(a_n+6)\times\lim_{n\to\infty}(b_n+2)\\&=(-3+6)\times(4+2)\\&=18\end{aligned}$$

답 18

4 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{an^2+1}{n^2+2n}$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+1}{n^2+2n}=0$

$\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+1}{n^2+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n}}=a$이므로

$a=0$

이때

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{an^2+1}{n^2+2n}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2n}\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+2k}\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\right.\\&\qquad\left.+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)\\&=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

이므로 $b=\frac{3}{4}$

따라서 $a+b=0+\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$

답 ④

5 $n=1$일 때,

$a_1=S_1=4+c$

$n\geq2$일 때,

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=(4^n+c)-(4^{n-1}+c)\\&=3\times4^{n-1}\end{aligned}$$

이때 수열 $\{a_n\}$이 등비수열이므로

$4+c=3$에서 $c=-1$

즉, $a_n=3\times4^{n-1}$ $(n\geq1)$이고, $\frac{1}{a_n}=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}&=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\}\\&=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{4}}\\&=\frac{4}{9}\end{aligned}$$

따라서 $c+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=(-1)+\frac{4}{9}=-\frac{5}{9}$

답 ①

6 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하므로

$-1<\frac{1}{q}<1$에서 q는 2 이상의 자연수이다.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \dfrac{p}{1-\dfrac{1}{q}} = \dfrac{pq}{q-1} = 6$에서

$6(q-1)=pq$

$6q-pq=6$

$q(6-p)=6$

$q=2$일 때 $6-p=3$, $p=3$

$q=3$일 때 $6-p=2$, $p=4$

$q=6$일 때 $6-p=1$, $p=5$

이때 $p<q$이므로

$p=5$, $q=6$

따라서 $p\times q=5\times 6=30$

답 30

Level 1 기초 연습

본문 20쪽

1 ③ 2 ④ 3 ③ 4 ⑤

1 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+\cdots +\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

$=1-0$

$=1$

답 ③

2 $3a_n-b_n=c_n$이라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n=1$

이때 $b_n=3a_n-c_n$이고, 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$이 모두 수렴하므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (3a_n - c_n)$$

$$= 3\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

$=3\times 4-1$

$=11$

답 ④

3 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

따라서

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n+n^2-3n}{2a_n+3n^2-n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{a_n}{n^2}+1-\dfrac{3}{n}}{\dfrac{2a_n}{n^2}+3-\dfrac{1}{n}}$$

$$= \frac{0+1-0}{0+3-0}$$

$$= \frac{1}{3}$$

답 ③

4 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n+4^n}{7^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\left(\dfrac{3}{7}\right)^n + \left(\dfrac{4}{7}\right)^n\right\}$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{7}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{7}\right)^n$$

$$= \frac{\dfrac{3}{7}}{1-\dfrac{3}{7}} + \frac{\dfrac{4}{7}}{1-\dfrac{4}{7}}$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{4}{3}$$

$$= \frac{25}{12}$$

답 ⑤

Level 2 기본 연습

본문 21쪽

1 ② 2 ② 3 3 4 ⑤

1 세 수 $a+13$, $a+1$, $a-2$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$(a+1)^2=(a+13)(a-2)$

$a^2+2a+1=a^2+11a-26$

$9a=27$

$a=3$

이때 세 수 16, 4, 1이 이 순서대로 공비가 r인 등비수열을 이루므로

$r=\frac{1}{4}$

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{3\times\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}\right\}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{3}{16}\times\left(\frac{1}{16}\right)^{n-1}\right\}$$
$$=\frac{\frac{3}{16}}{1-\frac{1}{16}}$$
$$=\frac{1}{5}$$

답 ②

2 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_6-a_3=3d$이므로

$3d=17-11$에서 $d=2$

$a_1=a_3-2d=11-2\times2=7$이므로

$a_n=7+(n-1)\times2=2n+5$

이때

$$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$$
$$=\frac{n(7+2n+5)}{2}$$
$$=n(n+6)$$

$$S_n+8=n(n+6)+8$$
$$=n^2+6n+8$$
$$=(n+2)(n+4)$$

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_n+8}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+4)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+2)(k+4)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+4}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+4}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)$$
$$=\frac{7}{24}$$

답 ②

3 조건 (가)에서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-ka_n}{a_n}$이 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-ka_n}{a_n}=0$$

즉, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{a_n}-k\right)=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{n^2}{a_n}-k\right)+k\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{a_n}-k\right)+\lim_{n\to\infty}k$$
$$=0+k$$
$$=k$$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=\frac{1}{k}$

조건 (나)에서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2a_n+7a_n^2}{a_n^2+n^4}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{n^2}+7\times\left(\frac{a_n}{n^2}\right)^2}{\left(\frac{a_n}{n^2}\right)^2+1}$$
$$=\frac{\frac{1}{k}+7\times\left(\frac{1}{k}\right)^2}{\left(\frac{1}{k}\right)^2+1}$$
$$=\frac{k+7}{1+k^2}$$

이므로 $\frac{k+7}{1+k^2}=1$에서

$k+7=1+k^2$

$k^2-k-6=0$

$(k+2)(k-3)=0$

$k=-2$ 또는 $k=3$

이때 $k>0$이므로 $k=3$

답 3

4 $a_1=1$, $a_2=2$이므로

$a_1a_2a_3=\frac{1}{4}$에서 $a_3=\frac{1}{8}$

또 $a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}=\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$이므로

$$\frac{a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}}{a_na_{n+1}a_{n+2}}=\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{4}\right)^n}$$에서

$$\frac{a_{n+3}}{a_n}=\frac{1}{4}$$

즉, 수열 $\{a_{3n-2}\}$, $\{a_{3n-1}\}$, $\{a_{3n}\}$은 첫째항이 각각 1, 2, $\frac{1}{8}$이고 공비가 모두 $\frac{1}{4}$인 등비수열이다.

따라서

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}a_n&=\sum_{n=1}^{\infty}a_{3n-2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_{3n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}a_{3n}\\&=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}+\frac{2}{1-\frac{1}{4}}+\frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{4}}\\&=\frac{4}{3}\times\left(1+2+\frac{1}{8}\right)\\&=\frac{4}{3}\times\frac{25}{8}\\&=\frac{25}{6}\end{aligned}$$

답 ⑤

Level 3 실력 완성

본문 22~23쪽

1 ⑤ 2 ③ 3 ③ 4 ④

1 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2x-k}{5}\right)^n$이 수렴하므로

$-1<\frac{2x-k}{5}<1$에서 $\frac{k-5}{2}<x<\frac{k+5}{2}$

k의 값이 홀수이면 $\frac{k-5}{2}$, $\frac{k+5}{2}$의 값이 정수이고,

k의 값이 짝수이면 $\frac{k-5}{2}$, $\frac{k+5}{2}$의 값이 정수가 아니므로

k의 값이 홀수인 경우와 짝수인 경우로 나누어 생각한다.

(i) $k=2m-1$ (m은 자연수)일 때

$\frac{(2m-1)-5}{2}<x<\frac{(2m-1)+5}{2}$

$m-3<x<m+2$이므로

정수 x의 값은 $m-2$, $m-1$, m, $m+1$

즉, $f(2m-1)=4$

(ii) $k=2m$ (m은 자연수)일 때

$\frac{2m-5}{2}<x<\frac{2m+5}{2}$

$m-\frac{5}{2}<x<m+\frac{5}{2}$이므로

정수 x의 값은 $m-2$, $m-1$, m, $m+1$, $m+2$

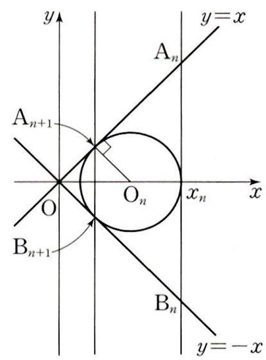
즉, $f(2m)=5$

(i), (ii)에서

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{20}f(k)&=\sum_{m=1}^{10}\{f(2m-1)+f(2m)\}\\&=\sum_{m=1}^{10}(4+5)\\&=10\times9\\&=90\end{aligned}$$

답 ⑤

2 삼각형 A_nOB_n에 내접하는 원의 중심을 O_n, 반지름의 길이를 r_n이라 하자.



삼각형 $A_{n+1}OO_n$은 $\overline{A_{n+1}O}=\overline{A_{n+1}O_n}$이고

$\angle OA_{n+1}O_n=\frac{\pi}{2}$인 직각이등변삼각형이다.

$\overline{A_{n+1}O}=\overline{A_{n+1}O_n}=r_n$이므로

$\overline{OO_n}=\sqrt{2}r_n$

그러므로 $\sqrt{2}r_n+r_n=x_n$에서

$r_n=\frac{1}{\sqrt{2}+1}x_n$ ...... ㉠

또 선분 OO_n의 중점의 x좌표가 x_{n+1}이므로

$x_{n+1}=\frac{\overline{OO_n}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}r_n$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$$\begin{aligned}x_{n+1}&=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}+1}x_n\\&=\frac{1}{2+\sqrt{2}}x_n\end{aligned}$$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$은 첫째항이 8이고 공비가 $\frac{1}{2+\sqrt{2}}$인 등비급수의 합이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \frac{8}{1-\frac{1}{2+\sqrt{2}}}$$
$$= \frac{8(2+\sqrt{2})}{1+\sqrt{2}}$$
$$= \frac{8\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}{1+\sqrt{2}}$$
$$= 8\sqrt{2}$$

답 ③

3 등비수열 $\{a_n\}$의 공비가 $\frac{3}{4}$이므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 수렴하고

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{p}{1-\frac{3}{4}} = 4p$$

또 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n)$과 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 모두 수렴하므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \{(b_n - a_n) + a_n\}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$
$$= q + 4p \qquad \cdots\cdots ㉠$$

즉, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$은 수렴한다.

한편, 등비수열 $\{b_n\}$의 공비가 $\frac{2p-10}{p-2}$이므로

$$-1 < \frac{2p-10}{p-2} < 1$$

$p-2>0$이므로 $-p+2 < 2p-10 < p-2$

$-p+2 < 2p-10$에서 $p>4$이고

$2p-10 < p-2$에서 $p<8$이므로

$4<p<8$

p가 3의 배수인 자연수이므로 $p=6$

이때 수열 $\{b_n\}$의 공비가 $\frac{1}{2}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{6}{1-\frac{1}{2}} = 12$$

㉠에서

$q+24=12$이므로 $q=-12$

따라서 $p+q=6+(-12)=-6$

답 ③

4 $$S_m = \{(m+1)-m\} \times \left[\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^m + 3\right\} - \left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{m+1} + 3\right\}\right]$$
$$= \left(\frac{1}{3}\right)^m - \left(\frac{1}{3}\right)^{m+1}$$
$$= \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^m$$

이때

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_{m+2n}$$
$$= S_{m+2} + S_{m+4} + S_{m+6} + \cdots$$
$$= \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{m+2} + \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{m+4} + \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{m+6} + \cdots$$

즉, $\sum_{n=1}^{\infty} S_{m+2n}$은 첫째항이 S_{m+2}이고 공비가 $\frac{1}{9}$인 등비급수의 합이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_{m+2n} = \frac{\frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{m+2}}{1-\frac{1}{9}}$$
$$= \frac{1}{12} \times \left(\frac{1}{3}\right)^m$$

따라서 $\frac{1}{12} \times \left(\frac{1}{3}\right)^m > \frac{1}{1200}$에서

$$\left(\frac{1}{3}\right)^m > \frac{1}{100}$$

$3^m < 100$

이때 $3^4 < 100 < 3^5$이므로 구하는 자연수 m의 최댓값은 4이다.

답 ④

03 여러 가지 함수의 미분

유제

본문 27~35쪽

1 ④	2 4	3 ②	4 ⑤	5 ②
6 ①	7 ④	8 ①	9 ②	

1 $\lim_{x \to 0} \frac{e^{6x}-e^{4x}-e^{2x}+1}{x^2}$

$=\lim_{x \to 0} \frac{e^{4x}(e^{2x}-1)-(e^{2x}-1)}{x^2}$

$=\lim_{x \to 0} \frac{(e^{2x}-1)(e^{4x}-1)}{x^2}$

$=\lim_{x \to 0} \left(\frac{e^{2x}-1}{x} \times \frac{e^{4x}-1}{x}\right)$

$=\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x}-1}{x} \times \lim_{x \to 0} \frac{e^{4x}-1}{x}$

$=\lim_{x \to 0} \left(\frac{e^{2x}-1}{2x} \times 2\right) \times \lim_{x \to 0} \left(\frac{e^{4x}-1}{4x} \times 4\right)$

$=(1\times 2)\times(1\times 4)$

$=8$

답 ④

2 $\frac{f(1+x)+g(1-x)}{f(2+x)+g(2-x)}=\frac{3^{1+x}+4^{-1+x}}{3^{2+x}+4^{-2+x}}$

$=\frac{3\times 3^x+\frac{1}{4}\times 4^x}{9\times 3^x+\frac{1}{16}\times 4^x}$

$=\frac{3\times\left(\frac{3}{4}\right)^x+\frac{1}{4}}{9\times\left(\frac{3}{4}\right)^x+\frac{1}{16}}$

이때 $0<\frac{3}{4}<1$이므로 $\lim_{x \to \infty}\left(\frac{3}{4}\right)^x=0$

따라서

$\lim_{x \to \infty} \frac{f(1+x)+g(1-x)}{f(2+x)+g(2-x)}=\lim_{x \to \infty} \frac{3\times\left(\frac{3}{4}\right)^x+\frac{1}{4}}{9\times\left(\frac{3}{4}\right)^x+\frac{1}{16}}$

$=\frac{\lim_{x \to \infty}\left\{3\times\left(\frac{3}{4}\right)^x\right\}+\lim_{x \to \infty}\frac{1}{4}}{\lim_{x \to \infty}\left\{9\times\left(\frac{3}{4}\right)^x\right\}+\lim_{x \to \infty}\frac{1}{16}}$

$=\frac{0+\frac{1}{4}}{0+\frac{1}{16}}$

$=4$

답 4

3 $\overline{PH}=t-1$, $\overline{AH}=f(t)-f(1)$이므로

$\lim_{t \to 1+} \frac{\overline{AH}}{\overline{PH}}=\lim_{t \to 1+} \frac{f(t)-f(1)}{t-1}$

$=\lim_{t \to 1+} \frac{\frac{1}{2}e^{t+1}-\frac{1}{2}e^2}{t-1}$

$=\frac{1}{2}e^2\times\lim_{t \to 1+} \frac{e^{t-1}-1}{t-1}$

이때 $\lim_{t \to 1+} \frac{e^{t-1}-1}{t-1}$에서 $t-1=k$로 놓으면

$t \to 1+$일 때 $k \to 0+$이므로

$\lim_{t \to 1+} \frac{e^{t-1}-1}{t-1}=\lim_{k \to 0+} \frac{e^k-1}{k}=1$

따라서

$\lim_{t \to 1+} \frac{\overline{AH}}{\overline{PH}}=\frac{1}{2}e^2\times\lim_{t \to 1+} \frac{e^{t-1}-1}{t-1}$

$=\frac{1}{2}e^2\times 1$

$=\frac{e^2}{2}$

답 ②

4 $f(x)=x^4\ln x+4x$라 하면 $f(1)=4$이므로

$\lim_{x \to 1} \frac{x^4\ln x+4x-4}{x-1}=\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=f'(1)$

$f(x)=x^4\ln x+4x$에서

$f'(x)=4x^3\times\ln x+x^4\times\frac{1}{x}+4$

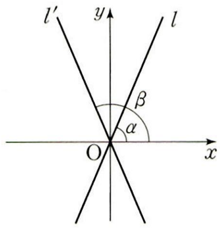
$=4x^3\ln x+x^3+4$

따라서

$\lim_{x \to 1} \frac{x^4\ln x+4x-4}{x-1}=f'(1)=0+1+4=5$

답 ⑤

5 $m>1$이므로 두 직선 l, l'이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면 두 직선 l, l'은 그림과 같다.



이때 $\tan\alpha=m$, $\tan\beta=-m$이고, 두 직선 l, l'이 이루는 예각의 크기는 $\beta-\alpha=\frac{\pi}{4}$이다.

$$\begin{aligned}\tan(\beta-\alpha)&=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}\\&=\frac{-m-m}{1+(-m)\times m}\\&=\frac{-2m}{1-m^2}\end{aligned}$$

이고 $\tan\frac{\pi}{4}=1$이므로 $\frac{-2m}{1-m^2}=1$에서

$m^2-2m-1=0$

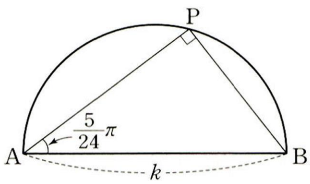
$m=1-\sqrt{2}$ 또는 $m=1+\sqrt{2}$

따라서 $m>1$이므로

$m=1+\sqrt{2}$

답 ②

6



삼각형 PAB에서 $\angle APB=\frac{\pi}{2}$이므로 $\overline{AB}=k\ (k>0)$이라 하면

$\overline{PA}=k\cos\frac{5}{24}\pi$, $\overline{PB}=k\sin\frac{5}{24}\pi$

$$\begin{aligned}\overline{PA}^2\times\overline{PB}^2&=k^2\cos^2\frac{5}{24}\pi\times k^2\sin^2\frac{5}{24}\pi\\&=\frac{k^4}{4}\times\left(4\sin^2\frac{5}{24}\pi\cos^2\frac{5}{24}\pi\right)\\&=\frac{k^4}{4}\times\sin^2\frac{5}{12}\pi\end{aligned}$$

이때

$$\begin{aligned}\sin\frac{5}{12}\pi&=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)\\&=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}\\&=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}\overline{PA}^2\times\overline{PB}^2&=\frac{k^4}{4}\times\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2\\&=\frac{k^4(2+\sqrt{3})}{16}\end{aligned}$$

$\frac{k^4(2+\sqrt{3})}{16}=4(2+\sqrt{3})$에서 $k^4=64$

$k>0$이므로 $k=2\sqrt{2}$

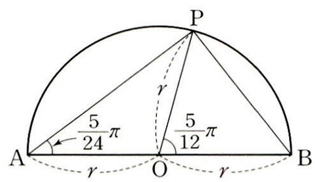
따라서 선분 AB의 길이는 $2\sqrt{2}$이다.

답 ①

참고

$$\begin{aligned}\sin2\theta&=\sin(\theta+\theta)\\&=\sin\theta\cos\theta+\cos\theta\sin\theta\\&=2\sin\theta\cos\theta\end{aligned}$$

다른 풀이



선분 AB의 중점을 O라 하면 중심각과 원주각의 성질에 의하여 $\angle POB=2\angle PAB=2\times\frac{5}{24}\pi=\frac{5}{12}\pi$

$$\begin{aligned}\cos\frac{5}{12}\pi&=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)\\&=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}\\&=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

이때 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OP}=r\ (r>0)$이라 하면 삼각형 POB에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{PB}^2&=\overline{OP}^2+\overline{OB}^2-2\times\overline{OP}\times\overline{OB}\times\cos\frac{5}{12}\pi\\&=r^2+r^2-2\times r\times r\times\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\\&=2r^2\times\left(1-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)\end{aligned}$$

또 삼각형 PAO에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{PA}^2=\overline{OP}^2+\overline{OA}^2-2\times\overline{OP}\times\overline{OA}\times\cos\left(\pi-\frac{5}{12}\pi\right)$$

$=r^2+r^2-2\times r\times r\times\left(-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$

$=2r^2\times\left(1+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$

이므로

$\overline{PA}^2\times\overline{PB}^2$

$=\left\{2r^2\times\left(1+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)\right\}\times\left\{2r^2\times\left(1-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)\right\}$

$=4r^4\times\left\{1-\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{16}\right\}$

$=r^4(2+\sqrt{3})$

$r^4(2+\sqrt{3})=4(2+\sqrt{3})$에서 $r^4=4$

$r>0$이므로 $r=\sqrt{2}$

따라서 선분 AB의 길이는 $2\times\sqrt{2}=2\sqrt{2}$이다.

7 $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{1-\cos 2x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos^2 3x)(1+\cos 2x)}{(1-\cos^2 2x)(1+\cos 3x)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x\times(1+\cos 2x)}{\sin^2 2x\times(1+\cos 3x)}$

$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{\sin^2 3x}{9x^2}\times 9}{\frac{\sin^2 2x}{4x^2}\times 4}\times\frac{1+\cos 2x}{1+\cos 3x}\right)$

$=\frac{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2 3x}{9x^2}\times 9\right)}{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2 2x}{4x^2}\times 4\right)}\times\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos 2x}{1+\cos 3x}$

$=\frac{1\times 9}{1\times 4}\times\frac{1+1}{1+1}=\frac{9}{4}$

답 ④

8 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{2}=-1$이므로

$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}+3h\right)+1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}+3h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}+3h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{3h}\times 3$

$=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\times 3$

$f(x)=x\cos x-\sin x$에서

$f'(x)=\cos x+x\times(-\sin x)-\cos x$

$=-x\sin x$

이므로 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}$

따라서

$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}+3h\right)+1}{h}=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\times 3=-\frac{\pi}{2}\times 3=-\frac{3}{2}\pi$

답 ①

9 $f(x)=ax-3\sin x$에서

$f'(x)=a-3\cos x$

$f'(x)=0$에서 $a-3\cos x=0$

$\cos x=\frac{a}{3}$

$0\le x<2\pi$에서 $-1\le\cos x\le 1$이므로 방정식 $\cos x=\frac{a}{3}$의 실근이 존재하려면 $-1\le\frac{a}{3}\le 1$이어야 한다.

따라서 $-3\le a\le 3$이므로 정수 a의 값은 -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3이고, 그 개수는 7이다.

답 ②

Level 1 기초 연습 본문 36쪽

1 ② **2** ④ **3** ② **4** 16

1 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{x^2+2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{x(x+2)}$

$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\ln(1+3x)}{3x}\times\frac{3}{x+2}\right\}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{3x}\times\lim_{x\to 0}\frac{3}{x+2}$

$=1\times\frac{3}{2}$

$=\frac{3}{2}$

답 ②

2 함수 $f(x)$가 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$\lim_{h\to 0}\frac{f(e^2+2h)-f(e^2-3h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(e^2+2h)-f(e^2)}{h}-\frac{f(e^2-3h)-f(e^2)}{h}\right\}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(e^2+2h)-f(e^2)}{2h}\times 2$

$-\lim_{h\to 0}\frac{f(e^2-3h)-f(e^2)}{-3h}\times(-3)$

$=2f'(e^2)+3f'(e^2)$

$=5f'(e^2)$

한편, $f(x)=x^2(\ln x+2)$에서

$f'(x)=2x\times(\ln x+2)+x^2\times\dfrac{1}{x}$

$\quad=2x(\ln x+2)+x$

따라서 $f'(e^2)=2e^2\times 4+e^2=9e^2$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(e^2+2h)-f(e^2-3h)}{h}&=5f'(e^2)\\&=5\times 9e^2\\&=45e^2\end{aligned}$$

답 ④

3 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}+a}{\sin 3x}=b$에서 $x\to 0$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

함수 $y=e^{2x}+a$가 연속함수이므로

$\displaystyle\lim_{x\to 0}(e^{2x}+a)=0$에서

$1+a=0$, $a=-1$

이때

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}+a}{\sin 3x}&=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\sin 3x}\\&=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\times\frac{3x}{\sin 3x}\times\frac{2}{3}\right)\\&=\frac{2}{3}\times\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\times\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 3x}\\&=\frac{2}{3}\times 1\times 1\\&=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

이므로 $b=\dfrac{2}{3}$

따라서 $a+b=-1+\dfrac{2}{3}=-\dfrac{1}{3}$

답 ②

4 $f(x)=2(x-\cos x)$에서 $f'(x)=2(1+\sin x)$

$g(x)=2(1-\sin x)$에서 $g'(x)=-2\cos x$

그러므로

$$\begin{aligned}h(x)&=\{f'(x)\}^2+\{g'(x)\}^2\\&=4(1+\sin x)^2+4\cos^2 x\\&=4(1+2\sin x+\sin^2 x)+4\cos^2 x\\&=4+4(\sin^2 x+\cos^2 x)+8\sin x\\&=8+8\sin x\end{aligned}$$

이때 $-1\le\sin x\le 1$이므로

$0\le 8+8\sin x\le 16$

따라서 함수 $h(x)$의 최댓값은 16이다.

답 16

Level 2 기본 연습

본문 37~38쪽

1 ③	2 10	3 ①	4 ⑤	5 ④
6 3	7 ③	8 ②		

1 $\sin\alpha+2\cos\beta=\dfrac{9}{5}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\alpha+4\cos^2\beta+4\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{81}{25}$ …… ㉠

$\cos\alpha+2\sin\beta=\dfrac{12}{5}$의 양변을 제곱하면

$\cos^2\alpha+4\sin^2\beta+4\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{144}{25}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 변끼리 더하면

$(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+4(\sin^2\beta+\cos^2\beta)$

$\qquad+4(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)=9$

$1+4+4\sin(\alpha+\beta)=9$

$\sin(\alpha+\beta)=1$

이때 $0\le\alpha+\beta\le\pi$이므로

$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$

답 ③

2 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$e^x-1=t$에서 $x=\ln(1+t)$이므로

$\mathrm{H}(\ln(1+t),\ 0)$

또 $e^x-1=5t$에서 $x=\ln(1+5t)$이므로

$\mathrm{C}(\ln(1+5t),\ 0)$

삼각형 ACB의 넓이는

$$\begin{aligned}S(t)&=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{HC}}\\&=\frac{1}{2}\times 5t\times\{\ln(1+5t)-\ln(1+t)\}\\&=\frac{5}{2}t\{\ln(1+5t)-\ln(1+t)\}\end{aligned}$$

따라서

$\displaystyle\lim_{t\to 0+}\frac{S(t)}{t^2}$

$=\frac{5}{2}\lim_{t\to 0+}\frac{\ln(1+5t)-\ln(1+t)}{t}$

$=\frac{5}{2}\lim_{t\to 0+}\left\{\frac{\ln(1+5t)}{t}-\frac{\ln(1+t)}{t}\right\}$

$=\frac{5}{2}\times\left\{\lim_{t\to 0+}\frac{\ln(1+5t)}{5t}\times 5-\lim_{t\to 0+}\frac{\ln(1+t)}{t}\right\}$

$=\frac{5}{2}\times(1\times 5-1)$

$=10$

답 10

3 (i) $\sin^2\gamma+\cos^2\gamma=1$이므로

$(-\sin\alpha-\sin\beta)^2+(-\cos\alpha-\cos\beta)^2=1$

$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta$
$+\cos^2\alpha+\cos^2\beta+2\cos\alpha\cos\beta=1$

$(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+(\sin^2\beta+\cos^2\beta)$
$+2(\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha)=1$

$1+1+2\cos(\beta-\alpha)=1$

$\cos(\beta-\alpha)=-\frac{1}{2}$

이때 $0<\beta-\alpha<2\pi$이므로

$\beta-\alpha=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $\beta-\alpha=\frac{4}{3}\pi$

(ii) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$이므로

$(-\sin\beta-\sin\gamma)^2+(-\cos\beta-\cos\gamma)^2=1$

$\sin^2\beta+\sin^2\gamma+2\sin\beta\sin\gamma$
$+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+2\cos\beta\cos\gamma=1$

$(\sin^2\beta+\cos^2\beta)+(\sin^2\gamma+\cos^2\gamma)$
$+2(\cos\gamma\cos\beta+\sin\gamma\sin\beta)=1$

$1+1+2\cos(\gamma-\beta)=1$

$\cos(\gamma-\beta)=-\frac{1}{2}$

이때 $0<\gamma-\beta<2\pi$이므로

$\gamma-\beta=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $\gamma-\beta=\frac{4}{3}\pi$

(i), (ii)에서 $(\beta-\alpha)+(\gamma-\beta)=\gamma-\alpha$이고, $0<\gamma-\alpha<2\pi$이므로 $(\beta-\alpha)+(\gamma-\beta)$의 값이 2π보다 작아야 한다.
즉, 조건을 만족시키는 경우는

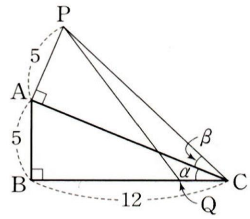
$\beta-\alpha=\frac{2}{3}\pi$, $\gamma-\beta=\frac{2}{3}\pi$뿐이다.

따라서

$\tan(\beta-\alpha)+\tan(\gamma-\beta)=\tan\frac{2}{3}\pi+\tan\frac{2}{3}\pi$
$=-\sqrt{3}-\sqrt{3}$
$=-2\sqrt{3}$

답 ①

4



직각삼각형 ABC에서

$\overline{AC}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{25+144}=13$

이므로 $\angle ACB=\alpha$라 하면

$\sin\alpha=\frac{5}{13}$, $\cos\alpha=\frac{12}{13}$

또 직각삼각형 PAC에서

$\overline{PC}=\sqrt{\overline{PA}^2+\overline{AC}^2}=\sqrt{25+169}=\sqrt{194}$

이므로 $\angle PCA=\beta$라 하면

$\sin\beta=\frac{5}{\sqrt{194}}$, $\cos\beta=\frac{13}{\sqrt{194}}$

이때

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$
$=\frac{5}{13}\times\frac{13}{\sqrt{194}}+\frac{12}{13}\times\frac{5}{\sqrt{194}}$

따라서 삼각형 PQC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{PQ}}{\sin(\alpha+\beta)}=2\times\frac{13\sqrt{194}}{20}$이므로

$\overline{PQ}=\frac{13\sqrt{194}}{10}\times\sin(\alpha+\beta)$
$=\frac{13\sqrt{194}}{10}\times\left(\frac{5}{13}\times\frac{13}{\sqrt{194}}+\frac{12}{13}\times\frac{5}{\sqrt{194}}\right)$
$=\frac{13}{2}+6=\frac{25}{2}$

답 ⑤

5 $\tan ax-\sin ax$

$=\frac{\sin ax}{\cos ax}-\sin ax$

$=\sin ax\times\left(\frac{1}{\cos ax}-1\right)$

$=\sin ax\times\frac{1-\cos ax}{\cos ax}$

$=\frac{\sin ax}{\cos ax}\times\frac{(1-\cos ax)(1+\cos ax)}{1+\cos ax}$

$=\tan ax\times\sin^2 ax\times\frac{1}{1+\cos ax}$

이때 $\lim_{x\to 0}\frac{\tan ax-\sin ax}{x^n}=108$에서

$x\to 0$일 때 (분자)$\to 0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 $n=3$이어야 하고,

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan ax-\sin ax}{x^3}$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\tan ax}{x}\times\frac{\sin^2 ax}{x^2}\times\frac{1}{1+\cos ax}\right)$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\tan ax}{ax}\times a\right)\times\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin^2 ax}{a^2x^2}\times a^2\right)\times\lim_{x\to0}\frac{1}{1+\cos ax}$$
$$=(1\times a)\times(1\times a^2)\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{2}a^3$$

$\frac{1}{2}a^3=108$에서

$a^3=216$, $a=6$

따라서 $a+n=6+3=9$

답 ④

6 $x-a=\theta$로 놓으면 $x=\theta+a$이고,

$x\to a$일 때 $\theta\to0$이므로

$$\lim_{x\to a}\left\{(x^2-a^2)\tan\left(\frac{\pi}{2a}x\right)\right\}$$
$$=\lim_{x\to a}\left\{(x-a)(x+a)\tan\left(\frac{\pi}{2a}x\right)\right\}$$
$$=\lim_{\theta\to0}\left\{\theta(\theta+2a)\tan\frac{\pi(\theta+a)}{2a}\right\}$$
$$=\lim_{\theta\to0}\left\{\theta(\theta+2a)\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2a}\theta\right)\right\}$$
$$=-\lim_{\theta\to0}\frac{\theta(\theta+2a)}{\tan\left(\frac{\pi}{2a}\theta\right)}$$
$$=-\lim_{\theta\to0}\left\{\frac{\frac{\pi}{2a}\theta}{\tan\left(\frac{\pi}{2a}\theta\right)}\times\frac{2a(\theta+2a)}{\pi}\right\}$$
$$=-\left\{\lim_{\theta\to0}\frac{\frac{\pi}{2a}\theta}{\tan\left(\frac{\pi}{2a}\theta\right)}\times\lim_{\theta\to0}\frac{2a(\theta+2a)}{\pi}\right\}$$
$$=-\left(1\times\frac{4a^2}{\pi}\right)$$
$$=-\frac{4a^2}{\pi}$$

따라서 $-\frac{4a^2}{\pi}=-\frac{36}{\pi}$에서

$a^2=9$

$a>0$이므로 $a=3$

답 3

참고

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}=\frac{\cos\theta}{-\sin\theta}=-\frac{1}{\tan\theta}$$

7 $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin x\cos\frac{\pi}{6}+\cos x\sin\frac{\pi}{6}$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x$$

이므로

$$\lim_{x\to0}\left\{\frac{4}{x}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{2}{x}\cos x+x\cos\frac{2}{x}\right\}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{4}{x}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x\right)-\frac{2}{x}\cos x+x\cos\frac{2}{x}\right\}$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{2\sqrt{3}\sin x}{x}+x\cos\frac{2}{x}\right)$$

0이 아닌 모든 실수 x에 대하여

$-1\le\cos\frac{2}{x}\le1$이므로 $-|x|\le x\cos\frac{2}{x}\le|x|$

이때 $\lim_{x\to0}(-|x|)=0$, $\lim_{x\to0}|x|=0$이므로

$$\lim_{x\to0}x\cos\frac{2}{x}=0$$

따라서

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{2\sqrt{3}\sin x}{x}+x\cos\frac{2}{x}\right)$$
$$=2\sqrt{3}\times\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}+\lim_{x\to0}x\cos\frac{2}{x}$$
$$=2\sqrt{3}\times1+0$$
$$=2\sqrt{3}$$

답 ③

8 $f(x)=\sin x\cos x$에서

$f'(x)=\cos x\times\cos x+\sin x\times(-\sin x)$
$=\cos^2 x-\sin^2 x$
$=\cos^2 x-(1-\cos^2 x)$
$=2\cos^2 x-1$

$2\cos^2 x-1=\frac{1}{n}$에서 $\cos^2 x=\frac{n+1}{2n}$

(i) $n=1$인 경우

$\cos^2 x=1$이므로

$\cos x=-1$ 또는 $\cos x=1$

이때 $0\le x<2\pi$에서 방정식 $\cos x=-1$의 실근은

$x=\pi$, 방정식 $\cos x=1$의 실근은 $x=0$이므로

$g(1)=\pi+0=\pi$

(ii) $n\ge 2$인 경우

$0<\frac{n+1}{2n}<1$이므로

$\cos x=-\sqrt{\frac{n+1}{2n}}$ 또는 $\cos x=\sqrt{\frac{n+1}{2n}}$

이때 $0\le x<2\pi$에서 방정식 $\cos x=-\sqrt{\frac{n+1}{2n}}$의 실근은 곡선 $y=\cos x$와 직선 $y=-\sqrt{\frac{n+1}{2n}}$이 만나는 점의 x좌표이고, 곡선 $y=\cos x$가 직선 $x=\pi$에 대하여 대칭이므로 방정식 $\cos x=-\sqrt{\frac{n+1}{2n}}$의 서로 다른 모든 실근의 합은 2π이다.

같은 방법으로 방정식 $\cos x=\sqrt{\frac{n+1}{2n}}$의 서로 다른 모든 실근의 합도 2π이다.

즉, $n\ge 2$이면 $g(n)=2\pi+2\pi=4\pi$

(i), (ii)에서

$\sum_{k=1}^{10}g(k)=g(1)+\sum_{k=2}^{10}g(k)=\pi+4\pi\times 9=37\pi$

답 ②

Level
3 실력 완성

본문 39~40쪽

1 16　　2 ②　　3 ③　　4 ④　　5 ⑤

1 조건 (가)에서 $x\to 1$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 1}\{2g(x)-2b^{2x}\}=0$에서 $2g(1)-2b^2=0$이므로

$2c-2b^2=0$

$c=b^2$　　…… ㉠

이때

$\lim_{x\to 1}\frac{2g(x)-2b^{2x}}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{2(c^x+\log_c x)-2b^{2x}}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{2(c^x+\log_c x)-2c^x}{x-1}$ (㉠에 의하여)

$=\lim_{x\to 1}\frac{2\log_c x}{x-1}$

$=\frac{2}{\ln c}\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$

$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$에서 $x-1=t$로 놓으면

$x\to 1$일 때 $t\to 0$이므로

$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$

즉, $\frac{2}{\ln c}\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=\frac{2}{\ln c}=-\frac{1}{\ln a}$에서

$\ln c=-2\ln a$

$c=a^{-2}$　　…… ㉡

또 $f(1)=a$, $g(1)=c$이므로 조건 (나)에서

$\frac{g(1)}{f(1)}=\frac{c}{a}=\frac{1}{64}$　　…… ㉢

㉡을 ㉢에 대입하면

$\frac{1}{a^3}=\frac{1}{64}$, $a=4$

$a=4$를 ㉡에 대입하면

$c=4^{-2}=\frac{1}{16}$

㉠에서 $b^2=\frac{1}{16}$

$b>0$이므로 $b=\frac{1}{4}$

따라서 $f(x)=4^x+\log_{\frac{1}{4}}x=4^x-\frac{1}{2}\log_2 x$,

$g(x)=\left(\frac{1}{16}\right)^x+\log_{\frac{1}{16}}x=4^{-2x}-\frac{1}{4}\log_2 x$이므로

$f(2)+g\left(\frac{1}{2}\right)=\left(16-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=16$

답 16

2 $1, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, e^2$이 등차수열을 이루므로

$f(n)=\frac{(n+2)(1+e^2)}{2}$

또 $1, b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n, e^2$이 등비수열을 이루므로 이 수열의 공비를 r $(r>0)$이라 하면

$1\times r^{n+1}=e^2$에서 $r=e^{\frac{2}{n+1}}$

$g(n)=\frac{1\times(r^{n+2}-1)}{r-1}=\frac{e^{\frac{2(n+2)}{n+1}}-1}{e^{\frac{2}{n+1}}-1}$

그러므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{g(n)}{f(n)}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{e^{\frac{2(n+2)}{n+1}}-1}{e^{\frac{2}{n+1}}-1}}{\frac{(n+2)(1+e^2)}{2}}$

$$=\frac{2}{1+e^2}\lim_{n\to\infty}\left[\left\{e^{\frac{2(n+2)}{n+1}}-1\right\}\times\frac{\frac{1}{n+2}}{e^{\frac{2}{n+1}}-1}\right]$$

$$=\frac{2}{1+e^2}\lim_{n\to\infty}\left[\left\{e^{\frac{2(n+2)}{n+1}}-1\right\}\times\frac{\frac{2}{n+1}}{e^{\frac{2}{n+1}}-1}\times\frac{n+1}{2(n+2)}\right]$$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n+1}}{e^{\frac{2}{n+1}}-1}$에서 $\frac{2}{n+1}=t$로 놓으면

$n\to\infty$일 때 $t\to 0+$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n+1}}{e^{\frac{2}{n+1}}-1}=\lim_{t\to 0+}\frac{t}{e^t-1}=\lim_{t\to 0+}\frac{1}{\frac{e^t-1}{t}}=\frac{1}{1}=1$$

또 $\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+2)}{n+1}=2$, $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2(n+2)}=\frac{1}{2}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{g(n)}{f(n)}$$

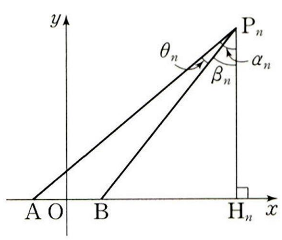
$$=\frac{2}{1+e^2}\left[\lim_{n\to\infty}\left\{e^{\frac{2(n+2)}{n+1}}-1\right\}\times\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n+1}}{e^{\frac{2}{n+1}}-1}\times\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2(n+2)}\right]$$

$$=\frac{2}{1+e^2}\left\{(e^2-1)\times 1\times\frac{1}{2}\right\}$$

$$=\frac{e^2-1}{1+e^2}$$

답 ②

3



점 P_n에서 x축에 내린 수선의 발을 H_n이라 하고 $\angle AP_nH_n=\alpha_n$, $\angle BP_nH_n=\beta_n$이라 하면 $\theta_n=\alpha_n-\beta_n$

이때

$$\tan\alpha_n=\frac{\overline{AH_n}}{\overline{P_nH_n}}=\frac{2n+1}{5},\ \tan\beta_n=\frac{\overline{BH_n}}{\overline{P_nH_n}}=\frac{2n-1}{5}$$

이므로

$$\tan\theta_n=\tan(\alpha_n-\beta_n)$$

$$=\frac{\tan\alpha_n-\tan\beta_n}{1+\tan\alpha_n\tan\beta_n}$$

$$=\frac{\frac{2n+1}{5}-\frac{2n-1}{5}}{1+\frac{2n+1}{5}\times\frac{2n-1}{5}}$$

$$=\frac{10}{25+(2n-1)(2n+1)}$$

따라서

$$\sum_{n=1}^{10}\frac{2\tan\theta_n}{2-5\tan\theta_n}$$

$$=\sum_{n=1}^{10}\frac{2\times\frac{10}{25+(2n-1)(2n+1)}}{2-5\times\frac{10}{25+(2n-1)(2n+1)}}$$

$$=\sum_{n=1}^{10}\frac{10}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$=5\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

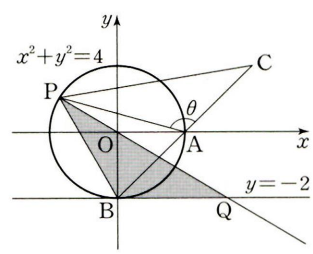
$$=5\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{19}-\frac{1}{21}\right)\right\}$$

$$=5\times\left(1-\frac{1}{21}\right)$$

$$=\frac{100}{21}$$

답 ③

4



$\angle AOB=\frac{\pi}{2}$이므로 중심각과 원주각의 성질에 의하여

$\angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{\pi}{4}$

삼각형 PBA에서 $\angle BAP=\pi-\theta$이므로

$\angle PBA=\pi-\frac{\pi}{4}-(\pi-\theta)=\theta-\frac{\pi}{4}$

이때 $\angle ABQ=\angle APB=\frac{\pi}{4}$이므로

$\angle PBQ=\angle PBA+\angle ABQ=\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{4}=\theta$

또 삼각형 PBA에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{AB}}{\sin\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\overline{PB}}{\sin(\pi-\theta)}$

$\dfrac{2\sqrt{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\dfrac{\overline{PB}}{\sin\theta}$

$\overline{PB}=4\sin\theta$

한편, 삼각형 OPB에서 $\angle PBO=\theta-\frac{\pi}{2}$이고

$\overline{OP}=\overline{OB}$이므로

$\angle OPB=\theta-\frac{\pi}{2}$

중심각과 원주각의 성질에 의하여

$\angle QOB=2\times\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=2\theta-\pi$

이므로 삼각형 OBQ에서

$\overline{BQ}=\overline{OB}\times\tan(2\theta-\pi)=2\tan 2\theta$

따라서 삼각형 PBQ의 넓이는

$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{PB}\times\overline{BQ}\times\sin\theta$

$=\frac{1}{2}\times 4\sin\theta\times 2\tan 2\theta\times\sin\theta$

$=4\tan 2\theta\sin^2\theta$

이므로

$\lim_{\theta\to\frac{3\pi}{4}-}\{(3\pi-4\theta)S(\theta)\}$

$=\lim_{\theta\to\frac{3\pi}{4}-}\{(3\pi-4\theta)\tan 2\theta\times 4\sin^2\theta\}$

이때 $\lim_{\theta\to\frac{3\pi}{4}-}\{(3\pi-4\theta)\tan 2\theta\}$에서 $\theta-\frac{3\pi}{4}=t$로 놓으면

$\theta\to\frac{3\pi}{4}-$일 때 $t\to 0-$이므로

$\lim_{\theta\to\frac{3\pi}{4}-}\{(3\pi-4\theta)\tan 2\theta\}$

$=\lim_{t\to 0-}\left\{(-4t)\tan\left(\frac{3\pi}{2}+2t\right)\right\}$

$=\lim_{t\to 0-}\dfrac{4t}{\tan 2t}$

$=\lim_{t\to 0-}\left(\dfrac{2t}{\tan 2t}\times 2\right)$

$=1\times 2$

$=2$

따라서

$\lim_{\theta\to\frac{3\pi}{4}-}\{(3\pi-4\theta)S(\theta)\}$

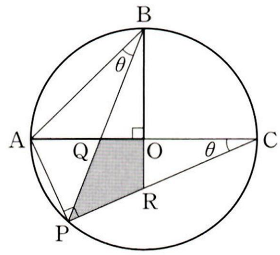
$=\lim_{\theta\to\frac{3\pi}{4}-}\{(3\pi-4\theta)\tan 2\theta\}\times\lim_{\theta\to\frac{3\pi}{4}-}4\sin^2\theta$

$=2\times 2$

$=4$

답 ④

5 $\angle CPA=\frac{\pi}{2}$이므로 점 P는 중심이 O이고 선분 AC를 지름으로 하는 원 위의 점이다.



원주각의 성질에 의하여

$\angle PBA=\angle PCA=\theta$

삼각형 AQB에서 $\overline{AB}=\sqrt{2}$이고,

$\angle BAQ=\frac{\pi}{4}$이므로

$\angle AQB=\pi-\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)=\frac{3}{4}\pi-\theta$

삼각형 AQB에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{AQ}}{\sin\theta}=\dfrac{\overline{AB}}{\sin\left(\frac{3}{4}\pi-\theta\right)}$이므로

$\overline{AQ}=\dfrac{\overline{AB}}{\sin\frac{3}{4}\pi\cos\theta-\cos\frac{3}{4}\pi\sin\theta}\times\sin\theta$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}\times\cos\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\times\sin\theta}\times\sin\theta$

$=\dfrac{2\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}$

한편, 사각형 OQPR의 넓이는 삼각형 APC의 넓이에서 두 삼각형 APQ, ORC의 넓이를 뺀 것과 같다.

이때 삼각형 APQ의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AP}\times\overline{AQ}\times\sin(\angle QAP)$

$=\frac{1}{2}\times 2\sin\theta\times\dfrac{2\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$=\frac{1}{2}\times 2\sin\theta\times\dfrac{2\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\times\cos\theta$

$=\dfrac{2\sin^2\theta\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}$

삼각형 ORC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{OC}\times\overline{OR}=\frac{1}{2}\times1\times\tan\theta=\frac{1}{2}\tan\theta$

삼각형 APC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AP}\times\overline{CP}=\frac{1}{2}\times2\sin\theta\times2\cos\theta=2\sin\theta\cos\theta$

따라서 사각형 OQPR의 넓이는

$$f(\theta)=2\sin\theta\cos\theta-\frac{2\sin^2\theta\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}-\frac{1}{2}\tan\theta$$
$$=\frac{\sin\theta(4\cos^2\theta-\tan\theta-1)}{2(\sin\theta+\cos\theta)}$$

이므로

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta(4\cos^2\theta-\tan\theta-1)}{2\theta(\sin\theta+\cos\theta)}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta}{\theta}\times\lim_{\theta\to0+}\frac{4\cos^2\theta-\tan\theta-1}{2(\sin\theta+\cos\theta)}$$
$$=1\times\frac{4\times1^2-0-1}{2\times(0+1)}$$
$$=\frac{3}{2}$$

답 ⑤

04 여러 가지 미분법

유제

본문 43~51쪽

1 ②	2 ④	3 ②	4 ②	5 ③
6 ⑤	7 ③	8 ①	9 ②	10 ③

1 $f(x)=\frac{1}{4}x^{\frac{4}{3}}$이라 하면

$a=f(8)=\frac{1}{4}\times8^{\frac{4}{3}}=\frac{1}{4}\times(2^3)^{\frac{4}{3}}=\frac{1}{4}\times16=4$

$f'(x)=\frac{1}{4}\times\frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}-1}=\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}}$

이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(8, 4)$에서의 접선의 기울기는

$b=f'(8)=\frac{1}{3}\times8^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\times2=\frac{2}{3}$

따라서 $a+b=4+\frac{2}{3}=\frac{14}{3}$

답 ②

2 함수 $f(x)$는 $x=a\ (0<a<\pi)$에서 미분가능하므로

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-\frac{f(a-h)-f(a)}{h}\right\}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-\lim_{h\to0}\frac{f(a-h)-f(a)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}$$
$$=f'(a)+f'(a)$$
$$=2f'(a)$$

$2f'(a)=-\frac{4}{3}$에서 $f'(a)=-\frac{2}{3}$

$f(x)=\cot x+\csc x$에서

$$f'(x)=-\csc^2x-\csc x\cot x$$
$$=-\frac{1}{\sin^2x}-\frac{1}{\sin x}\times\frac{\cos x}{\sin x}$$
$$=-\frac{1+\cos x}{\sin^2x}$$
$$=-\frac{1+\cos x}{1-\cos^2x}$$
$$=-\frac{1}{1-\cos x}$$

$f'(a)=-\frac{2}{3}$에서

$$-\frac{1}{1-\cos a}=-\frac{2}{3}$$

$$1-\cos a=\frac{3}{2}$$

$$\cos a=-\frac{1}{2}$$

$0<a<\pi$이므로 $a=\frac{2}{3}\pi$

답 ④

3 $f(x)=\sqrt{3+\ln x}$에서

$$f'(x)=\frac{(3+\ln x)'}{2\sqrt{3+\ln x}}=\frac{1}{2\sqrt{3+\ln x}}\times\frac{1}{x}=\frac{1}{2x\sqrt{3+\ln x}}$$

따라서

$$f'(e)=\frac{1}{2e\sqrt{3+\ln e}}=\frac{1}{2e\times2}=\frac{1}{4e}$$

답 ②

4 $f(x)=xe^{\cos x}$에서

$$\begin{aligned}f'(x)&=(x)'e^{\cos x}+x(e^{\cos x})'\\&=e^{\cos x}+x\times\{e^{\cos x}\times(\cos x)'\}\\&=e^{\cos x}+x\times\{e^{\cos x}\times(-\sin x)\}\\&=e^{\cos x}(1-x\sin x)\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}f'\left(\frac{\pi}{2}\right)&=e^{\cos\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right)\\&=e^{0}\left(1-\frac{\pi}{2}\right)\\&=1-\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

답 ②

5 $x=t+\frac{2}{t}$에서 $\frac{dx}{dt}=1-\frac{2}{t^2}$,

$y=t^2+t\ln t$에서 $\frac{dy}{dt}=2t+\ln t+t\times\frac{1}{t}=2t+\ln t+1$

이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t+\ln t+1}{1-\frac{2}{t^2}}\ (\text{단, } t\neq\sqrt{2})$$

따라서 $t=1$일 때 $\frac{dy}{dx}$의 값은

$$\frac{2+\ln 1+1}{1-\frac{2}{1^2}}=-3$$

답 ③

6 $x=3\cos t+\sin t$에서 $\frac{dx}{dt}=-3\sin t+\cos t$,

$y=4\sin t$에서 $\frac{dy}{dt}=4\cos t$

이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{4\cos t}{-3\sin t+\cos t}$$

(단, $-3\sin t+\cos t\neq0$)

$t=a\ (0<a<\pi)$에 대응하는 점에서의 접선의 기울기가 1이므로

$$\frac{4\cos a}{-3\sin a+\cos a}=1$$

$4\cos a=-3\sin a+\cos a$

$\cos a=-\sin a$ ······ ㉠

$\cos a=0$이면 $\sin a=1$이므로 ㉠을 만족시킬 수 없다.

즉, $\cos a\neq0$이므로 ㉠에서

$\frac{\sin a}{\cos a}=-1$, $\tan a=-1$

$0<a<\pi$이므로 $a=\frac{3}{4}\pi$

답 ⑤

7 $x^5+2x^3y+y^2=4$에서 y를 x의 함수로 보고 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}(x^5)+\frac{d}{dx}(2x^3y)+\frac{d}{dx}(y^2)=\frac{d}{dx}(4)\quad\cdots\cdots\ ㉠$$

곱의 미분법과 합성함수의 미분법에 의하여

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(2x^3y)&=\frac{d}{dx}(2x^3)\times y+2x^3\times\frac{d}{dx}(y)\\&=6x^2y+2x^3\frac{dy}{dx},\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx}(y^2)=\frac{d}{dy}(y^2)\times\frac{dy}{dx}=2y\frac{dy}{dx}$$

이므로 ㉠에서

$$5x^4+6x^2y+2x^3\frac{dy}{dx}+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{5x^4+6x^2y}{2x^3+2y} \text{ (단, } 2x^3+2y\neq0)$$

따라서 점 $(1,\ -3)$에서의 접선의 기울기는

$$-\frac{5-18}{2-6}=-\frac{13}{4}$$

답 ③

8 점 $\left(a,\ \frac{\pi}{2}\right)$가 곡선 $x\cos y+\sin 2y-x=4$ 위의 점이므로

$$a\cos\frac{\pi}{2}+\sin\pi-a=4$$

$$a=-4$$

$x\cos y+\sin 2y-x=4$에서 y를 x의 함수로 보고 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}(x\cos y)+\frac{d}{dx}(\sin 2y)-\frac{d}{dx}(x)=\frac{d}{dx}(4) \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

곱의 미분법과 합성함수의 미분법에 의하여

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(x\cos y)&=\frac{d}{dx}(x)\times\cos y+x\times\frac{d}{dx}(\cos y)\\&=\cos y+x\times\frac{d}{dy}(\cos y)\times\frac{dy}{dx}\\&=\cos y-x\sin y\frac{dy}{dx},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\sin 2y)&=\frac{d}{dy}(\sin 2y)\times\frac{dy}{dx}\\&=2\cos 2y\frac{dy}{dx}\end{aligned}$$

이므로 ㉠에서

$$\cos y-x\sin y\frac{dy}{dx}+2\cos 2y\frac{dy}{dx}-1=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos y-1}{x\sin y-2\cos 2y} \text{ (단, } x\sin y-2\cos 2y\neq0)$$

그러므로 점 $\left(-4,\ \frac{\pi}{2}\right)$에서의 접선의 기울기는

$$m=\frac{0-1}{-4-2\times(-1)}=\frac{1}{2}$$

따라서 $a+m=-4+\frac{1}{2}=-\frac{7}{2}$

답 ①

9 곡선 $y=g(x)$가 점 $\left(\frac{1}{4},\ e\right)$를 지나므로 $g\left(\frac{1}{4}\right)=e$이다.

함수 $f(x)=\ln x-\frac{k}{x}$의 역함수가 $g(x)$이므로

$f^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)=e$에서 $f(e)=\frac{1}{4}$

즉, $\ln e-\frac{k}{e}=\frac{1}{4}$이므로 $k=\frac{3}{4}e$

$\lim_{x\to\frac{1}{4}}\frac{g(x)-g\left(\frac{1}{4}\right)}{x-\frac{1}{4}}=g'\left(\frac{1}{4}\right)$이고

역함수의 미분법에 의하여

$$g'\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{f'\left(g\left(\frac{1}{4}\right)\right)}=\frac{1}{f'(e)} \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

이때

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{3}{4}e\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{x}+\frac{3e}{4x^2}$$

이므로

$$f'(e)=\frac{1}{e}+\frac{3}{4e}=\frac{7}{4e}$$

따라서 ㉠에서

$$g'\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{f'(e)}=\frac{4}{7}e$$

답 ②

10 $f(x)=x\tan x$에서

$$\begin{aligned}f'(x)&=(x)'\times\tan x+x\times(\tan x)'\\&=\tan x+x\sec^2 x\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}f''(x)&=(\tan x)'+(x)'\times\sec^2 x+x\times(\sec^2 x)'\\&=\sec^2 x+\sec^2 x+x\times2\sec x\times\sec x\tan x\\&=2\sec^2 x(1+x\tan x)\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}f''\left(\frac{\pi}{4}\right)&=2\sec^2\frac{\pi}{4}\times\left(1+\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{4}\right)\\&=2\times2\times\left(1+\frac{\pi}{4}\right)\\&=4+\pi\end{aligned}$$

답 ③

Level 1 기초 연습

본문 52~53쪽

1 ⑤	2 6	3 ②	4 ④	5 ①
6 ②	7 ⑤	8 ②		

1 $f(x)=\frac{\cos x}{e^x+1}$에서

$f'(x)=\dfrac{(\cos x)'\times(e^x+1)-\cos x\times(e^x+1)'}{(e^x+1)^2}$

$=\dfrac{(-\sin x)\times(e^x+1)-\cos x\times e^x}{(e^x+1)^2}$

$=\dfrac{-(e^x+1)\sin x-e^x\cos x}{(e^x+1)^2}$

따라서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ f(0))$에서의 접선의 기울기는

$f'(0)=\dfrac{-(1+1)\times 0-1\times 1}{(1+1)^2}=-\dfrac{1}{4}$

답 ⑤

2 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[k]{x}}=x^{-\frac{1}{k}}$에서

$f'(x)=-\dfrac{1}{k}x^{-\frac{1}{k}-1}$이므로

$\dfrac{f'(2)}{f(2)}=\dfrac{-\dfrac{1}{k}\times 2^{-\frac{1}{k}-1}}{2^{-\frac{1}{k}}}$

$=-\dfrac{1}{k}\times\dfrac{1}{2}$

$=-\dfrac{1}{2k}$

$-\dfrac{1}{2k}=-\dfrac{1}{12}$에서 $k=6$

답 6

다른 풀이

$g(x)=\ln f(x)$라 하면

$g(x)=\ln\dfrac{1}{\sqrt[k]{x}}=-\dfrac{1}{k}\ln x$에서

$g'(x)=-\dfrac{1}{kx}$이므로 $g'(2)=-\dfrac{1}{2k}$

그런데 $g(x)=\ln f(x)$에서

$g'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$이므로 $g'(2)=\dfrac{f'(2)}{f(2)}$

즉, $-\dfrac{1}{2k}=-\dfrac{1}{12}$

따라서 $k=6$

3 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{\sin^2\left(\frac{2}{3}\pi+2h\right)}{\cos^2\left(\frac{2}{3}\pi+2h\right)}-a\right\}$

$\displaystyle=\lim_{h\to 0}\frac{\tan^2\left(\frac{2}{3}\pi+2h\right)-a}{h}=b$

에서 $h\to 0$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\displaystyle\lim_{h\to 0}\left\{\tan^2\left(\frac{2}{3}\pi+2h\right)-a\right\}=0$에서

$a=\tan^2\dfrac{2}{3}\pi=3$

$f(x)=\tan^2 x$라 하면 $f\left(\dfrac{2}{3}\pi\right)=3$이므로

$\displaystyle b=\lim_{h\to 0}\frac{\tan^2\left(\frac{2}{3}\pi+2h\right)-3}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{2}{3}\pi+2h\right)-f\left(\frac{2}{3}\pi\right)}{2h}\times 2$

$=2f'\left(\dfrac{2}{3}\pi\right)$

$f(x)=\tan^2 x$에서

$f'(x)=2\times\tan x\times(\tan x)'$

$=2\tan x\sec^2 x$

이므로

$b=2f'\left(\dfrac{2}{3}\pi\right)$

$=2\times 2\times\tan\dfrac{2}{3}\pi\times\sec^2\dfrac{2}{3}\pi$

$=2\times 2\times(-\sqrt{3})\times 4$

$=-16\sqrt{3}$

따라서 $ab=3\times(-16\sqrt{3})=-48\sqrt{3}$

답 ②

4 $f(x)=\dfrac{1}{2}e^{\sin ax}$에서

$f'(x)=\dfrac{1}{2}e^{\sin ax}\times(\sin ax)'$

$=\dfrac{1}{2}e^{\sin ax}\times\{\cos ax\times(ax)'\}$

$=\dfrac{1}{2}e^{\sin ax}\times\cos ax\times a$

$=\dfrac{a}{2}e^{\sin ax}\cos ax$

점 $\left(\dfrac{\pi}{a},\ \dfrac{1}{2}\right)$에서의 접선의 기울기는

$f'\left(\dfrac{\pi}{a}\right)=\dfrac{a}{2}\times e^{\sin\pi}\times\cos\pi=\dfrac{a}{2}\times 1\times(-1)=-\dfrac{a}{2}$

점 $\left(\dfrac{2\pi}{a},\ \dfrac{1}{2}\right)$에서의 접선의 기울기는

$f'\left(\dfrac{2\pi}{a}\right)=\dfrac{a}{2}\times e^{\sin 2\pi}\times\cos 2\pi=\dfrac{a}{2}\times 1\times 1=\dfrac{a}{2}$

두 접선이 서로 수직이므로

$\left(-\dfrac{a}{2}\right)\times\dfrac{a}{2}=-1$

$a^2=4$

$a>0$이므로 $a=2$

답 ④

5 곡선이 y축과 만나는 점의 x좌표가 0이므로

$x=\frac{1}{4}(t+7)\ln t=0$

$t>0$이므로 $t=1$

즉, $t=1$에 대응하는 점이 곡선이 y축과 만나는 점이다.

$x=\frac{1}{4}(t+7)\ln t$에서

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{4}\times(t+7)'\times\ln t+\frac{1}{4}(t+7)\times(\ln t)'$$
$$=\frac{\ln t}{4}+\frac{t+7}{4t},$$

$y=\sqrt[3]{t+7}$에서

$$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{3}(t+7)^{-\frac{2}{3}}$$

이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{1}{3}(t+7)^{-\frac{2}{3}}}{\frac{\ln t}{4}+\frac{t+7}{4t}}$$

따라서 $t=1$에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는

$$\frac{\frac{1}{3}(1+7)^{-\frac{2}{3}}}{\frac{\ln 1}{4}+\frac{1+7}{4\times1}}=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}}{2}=\frac{1}{24}$$

답 ①

6 $y^3e^{2x}+x^2=y$에서 y를 x의 함수로 보고 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}(y^3e^{2x})+\frac{d}{dx}(x^2)=\frac{d}{dx}(y) \quad \cdots\cdots ㉠$$

곱의 미분법과 합성함수의 미분법에 의하여

$$\frac{d}{dx}(y^3e^{2x})=\frac{d}{dx}(y^3)\times e^{2x}+y^3\times\frac{d}{dx}(e^{2x})$$
$$=\frac{d}{dy}(y^3)\times\frac{dy}{dx}\times e^{2x}+y^3\times2e^{2x}$$
$$=3y^2e^{2x}\frac{dy}{dx}+2y^3e^{2x}$$

이므로 ㉠에서

$$3y^2e^{2x}\frac{dy}{dx}+2y^3e^{2x}+2x=\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2y^3e^{2x}+2x}{1-3y^2e^{2x}} \text{ (단, } 1-3y^2e^{2x}\neq0)$$

따라서 점 $(0,\ 1)$에서의 접선의 기울기는

$$\frac{2\times1\times1+2\times0}{1-3\times1\times1}=-1$$

답 ②

7 $g\left(\frac{1}{3}\right)=a$라 하면 $f(a)=\frac{1}{3}$이므로

$$\frac{e^a-1}{e^a+1}=\frac{1}{3}$$

$3e^a-3=e^a+1$

$2e^a=4$, $e^a=2$

$a=\ln 2$

그러므로 역함수의 미분법에 의하여

$$g'\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{f'\left(g\left(\frac{1}{3}\right)\right)}=\frac{1}{f'(\ln 2)} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때

$$f'(x)=\frac{(e^x-1)'\times(e^x+1)-(e^x-1)\times(e^x+1)'}{(e^x+1)^2}$$
$$=\frac{e^x\times(e^x+1)-(e^x-1)\times e^x}{(e^x+1)^2}$$
$$=\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$$

이므로

$$f'(\ln 2)=\frac{2e^{\ln 2}}{(e^{\ln 2}+1)^2}=\frac{4}{9}$$

따라서 ㉠에서

$$g'\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{f'(\ln 2)}=\frac{9}{4}$$

답 ⑤

8 $f(x)=x^2e^{\frac{x}{2}}$에서

$$f'(x)=(x^2)'\times e^{\frac{x}{2}}+x^2\times\left(e^{\frac{x}{2}}\right)'$$
$$=2xe^{\frac{x}{2}}+\frac{1}{2}x^2e^{\frac{x}{2}}$$
$$=\left(2x+\frac{1}{2}x^2\right)e^{\frac{x}{2}}$$

이므로

$$f''(x)=\left(2x+\frac{1}{2}x^2\right)'\times e^{\frac{x}{2}}+\left(2x+\frac{1}{2}x^2\right)\times\left(e^{\frac{x}{2}}\right)'$$
$$=(2+x)e^{\frac{x}{2}}+\left(x+\frac{1}{4}x^2\right)e^{\frac{x}{2}}$$
$$=\left(2+2x+\frac{1}{4}x^2\right)e^{\frac{x}{2}}$$

따라서 $f''(2)=(2+4+1)\times e=7e$

답 ②

Level 2 기본 연습 본문 54~55쪽

1 2	**2** ②	**3** ③	**4** ①	**5** ②
6 16	**7** ①	**8** ⑤		

1 $f(1)\times f'(1)\neq 0$에서 $f(1)\neq 0$이고 $f'(1)\neq 0$이다.

$g(x)=\dfrac{f(x)e^x}{x^k+1}$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$g(1)=\dfrac{e}{2}f(1)$이므로 $\dfrac{g(1)}{f(1)}=\dfrac{e}{2}$

$g(x)=\dfrac{f(x)e^x}{x^k+1}$에서

$$g'(x)=\frac{\{f(x)e^x\}'\times(x^k+1)-f(x)e^x\times(x^k+1)'}{(x^k+1)^2}$$
$$=\frac{\{f'(x)e^x+f(x)e^x\}\times(x^k+1)-f(x)e^x\times kx^{k-1}}{(x^k+1)^2}$$
$$=\frac{f'(x)e^x(x^k+1)+f(x)e^x(x^k-kx^{k-1}+1)}{(x^k+1)^2}$$
$$g'(1)=\frac{f'(1)\times e\times 2+f(1)\times e\times(2-k)}{4}$$

이므로

$$\frac{g'(1)}{f'(1)}=\frac{e}{2}+\frac{(2-k)e}{4}\times\frac{f(1)}{f'(1)}$$

$\dfrac{g(1)}{f(1)}=\dfrac{g'(1)}{f'(1)}$에서 $\dfrac{g'(1)}{f'(1)}=\dfrac{e}{2}$이므로

$$\frac{(2-k)e}{4}\times\frac{f(1)}{f'(1)}=0$$

$f(1)\neq 0$이므로 $k=2$

답 2

2 $\displaystyle\lim_{x\to e}\frac{f(x)-4e}{x-e}=3$에서 $x\to e$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to e}\{f(x)-4e\}=0$

함수 $f(x)$가 $x=e$에서 미분가능하므로 $x=e$에서 연속이다.

그러므로 $f(e)-4e=0$에서 $f(e)=4e$

이때

$$\lim_{x\to e}\frac{f(x)-4e}{x-e}=\lim_{x\to e}\frac{f(x)-f(e)}{x-e}=f'(e)$$

이므로 $f'(e)=3$

한편, $g(x)=\dfrac{f(x^2)}{\ln x}$에서

$$g'(x)=\frac{\{f(x^2)\}'\times\ln x-f(x^2)\times(\ln x)'}{(\ln x)^2}$$
$$=\frac{f'(x^2)\times 2x\times\ln x-f(x^2)\times\dfrac{1}{x}}{(\ln x)^2}$$

이므로

$$g'(\sqrt{e})=\frac{f'(e)\times 2\sqrt{e}\times\ln\sqrt{e}-f(e)\times\dfrac{1}{\sqrt{e}}}{(\ln\sqrt{e})^2}$$
$$=\frac{3\times 2\sqrt{e}\times\dfrac{1}{2}-4e\times\dfrac{1}{\sqrt{e}}}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}$$
$$=4(3\sqrt{e}-4\sqrt{e})$$
$$=-4\sqrt{e}$$

답 ②

3 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x-1}=\frac{1}{2}$에서 $x\to 1$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to 1}\{f(x)-2\}=0$

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.

그러므로 $f(1)-2=0$에서 $f(1)=2$

이때

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$$

이므로 $f'(1)=\dfrac{1}{2}$

$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{5g(f(x))-1}{x-1}=b$에서 $x\to 1$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to 1}\{5g(f(x))-1\}=0$

함수 $g(f(x))$는 $x=1$에서 연속이므로

$5g(f(1))-1=0$

$g(f(1))=\dfrac{1}{5}$

$f(1)=2$에서 $g(2)=\dfrac{1}{5}$이므로

$\dfrac{1}{2^2+a}=\dfrac{1}{5}$, $a=1$

즉, $g(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

$h(x)=g(f(x))$라 하면 $h(1)=\dfrac{1}{5}$이므로

$$\lim_{x\to 1}\frac{5g(f(x))-1}{x-1}=5\lim_{x\to 1}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}=5h'(1)$$

이때 $g(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$에서

$g'(x)=\dfrac{-(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$

$=-\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$

$h(x)=g(f(x))$에서

$h'(x)=g'(f(x))f'(x)$이므로

$h'(1)=g'(f(1))f'(1)$

$=g'(2)\times\dfrac{1}{2}$

$=-\dfrac{2\times2}{(2^2+1)^2}\times\dfrac{1}{2}$

$=-\dfrac{2}{25}$

$b=5h'(1)=5\times\left(-\dfrac{2}{25}\right)=-\dfrac{2}{5}$

따라서 $a+b=1+\left(-\dfrac{2}{5}\right)=\dfrac{3}{5}$

답 ③

4 함수 $f(x)$의 역함수가 $g(e^{2x})$이므로 모든 실수 x에 대하여

$f(g(e^{2x}))=x$ …… ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(g(e^{2x}))\times\{g(e^{2x})\}'=1$

$f'(g(e^{2x}))\times\{g'(e^{2x})\times(e^{2x})'\}=1$

$f'(g(e^{2x}))\times g'(e^{2x})\times 2e^{2x}=1$ …… ㉡

$e^{2x}=1$에서 $x=0$이므로 ㉡의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f'(g(1))\times g'(1)\times2=1$ …… ㉢

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $f(g(1))=0$이고

방정식 $f(x)=0$에서

$x^3+2x=0$, $x(x^2+2)=0$, $x=0$

이므로 $g(1)=0$이다.

한편, $f(x)=x^3+2x$에서 $f'(x)=3x^2+2$이므로

$f'(g(1))=f'(0)=2$

따라서 ㉢에서

$2\times g'(1)\times2=1$

$g'(1)=\dfrac{1}{4}$

답 ①

5 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f'(1+h)}{h}=\{f(1)\}^2$에서 $h\to0$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{h\to0}f'(1+h)=0$

$f(x)=\dfrac{ax}{x^2+b}$에서

$f'(x)=\dfrac{(ax)'\times(x^2+b)-ax\times(x^2+b)'}{(x^2+b)^2}$

$=\dfrac{a(x^2+b)-2ax^2}{(x^2+b)^2}$

$=\dfrac{a(b-x^2)}{(x^2+b)^2}$

이때 도함수 $f'(x)$는 $x=1$에서 연속이므로 $f'(1)=0$이다.

$f'(1)=0$에서 $\dfrac{a(b-1)}{(1+b)^2}=0$, $a\neq0$이므로 $b=1$

이때

$\{f(1)\}^2=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f'(1+h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f'(1+h)-f'(1)}{h}$

$=f''(1)$ …… ㉠

$f'(x)=\dfrac{a(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$에서

$f''(x)$

$=\dfrac{\{a(1-x^2)\}'\times(x^2+1)^2-a(1-x^2)\times\{(x^2+1)^2\}'}{(x^2+1)^4}$

$=\dfrac{-2ax(x^2+1)^2-a(1-x^2)\times2(x^2+1)\times2x}{(x^2+1)^4}$

$=\dfrac{-2ax(x^2+1)-4ax(1-x^2)}{(x^2+1)^3}$

$=\dfrac{2ax(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$

이므로

$f''(1)=\dfrac{2a\times1\times(1-3)}{(1+1)^3}=-\dfrac{a}{2}$

㉠에서 $\{f(1)\}^2=f''(1)$이므로

$\left(\dfrac{a}{2}\right)^2=-\dfrac{a}{2}$

$a^2+2a=0$

$a\neq0$이므로 $a=-2$

따라서 $a+b=-2+1=-1$

답 ②

6 $x=3+\ln\dfrac{2}{4-t}=3+\ln2-\ln(4-t)$에서

$\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{-1}{4-t}=\dfrac{1}{4-t}$,

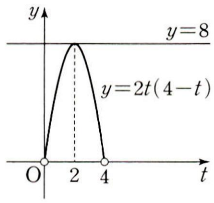
$y=1+t^2$에서 $\dfrac{dy}{dt}=2t$

이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t}{\frac{1}{4-t}}=2t(4-t)$$

곡선에 접하고 기울기가 m인 직선의 개수가 1이므로 $0<t<4$에서 t에 대한 방정식 $2t(4-t)=m$이 오직 한 개의 실근을 가져야 한다.

즉, 곡선 $y=2t(4-t)$ $(0<t<4)$와 직선 $y=m$이 오직 한 점에서 만나야 한다.



$y=2t(4-t)=-2t^2+8t=-2(t-2)^2+8$

이므로 그림과 같이 $m=8$일 때만 오직 한 점에서 만나고, 이때 $t=2$이다.

$t=2$에 대응하는 점의 좌표는

$\left(3+\ln\frac{2}{4-2},\ 1+2^2\right)$, 즉 $(3,\ 5)$이다.

따라서 $m+a+b=8+3+5=16$

답 16

7 곡선이 x축과 만나는 점의 y좌표가 0이므로

$e^{2x}-ke^{x+y}+y^2=-4$에 $y=0$을 대입하면

$e^{2x}-ke^x+4=0$ ······ ㉠

이때 $t=e^x$ $(t>0)$이라 하면

$t^2-kt+4=0$ ······ ㉡

이차방정식 ㉡의 판별식을 D라 하면

$D=(-k)^2-4\times4=k^2-16$

$k>4$에서 $D>0$이므로 ㉡은 서로 다른 두 실근 t_1, t_2 $(t_1<t_2)$를 갖고, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$t_1+t_2=k>0$, $t_1t_2=4>0$

이므로 t_1, t_2는 모두 양수이다.

즉, $t_1=e^\alpha$, $t_2=e^\beta$이라 하면 $t_1<t_2$에서 $\alpha<\beta$이고 α, β는 ㉠의 서로 다른 두 실근이므로 두 점 P, Q를 $\mathrm{P}(\alpha,\ 0)$, $\mathrm{Q}(\beta,\ 0)$이라 할 수 있다.

한편, $e^{2x}-ke^{x+y}+y^2=-4$에서 y를 x의 함수로 보고 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}(e^{2x})-\frac{d}{dx}(ke^{x+y})+\frac{d}{dx}(y^2)=\frac{d}{dx}(-4)$$

$$2e^{2x}-ke^{x+y}-ke^{x+y}\frac{dy}{dx}+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2e^{2x}-ke^{x+y}}{ke^{x+y}-2y}$ (단, $ke^{x+y}-2y\neq0$)

그러므로

점 $\mathrm{P}(\alpha,\ 0)$에서의 접선의 기울기는 $\dfrac{2e^{2\alpha}-ke^\alpha}{ke^\alpha-0}=\dfrac{2e^\alpha}{k}-1$,

점 $\mathrm{Q}(\beta,\ 0)$에서의 접선의 기울기는 $\dfrac{2e^{2\beta}-ke^\beta}{ke^\beta-0}=\dfrac{2e^\beta}{k}-1$

이다.

두 점 P, Q에서의 접선의 기울기의 차가 $\dfrac{6}{5}$이므로

$$\left|\left(\frac{2e^\alpha}{k}-1\right)-\left(\frac{2e^\beta}{k}-1\right)\right|=\frac{2}{k}(e^\beta-e^\alpha)=\frac{6}{5}$$

$e^\beta-e^\alpha=\dfrac{3}{5}k$

$t_1+t_2=e^\alpha+e^\beta=k$, $t_1t_2=e^\alpha e^\beta=4$이고

$(e^\beta-e^\alpha)^2=(e^\alpha+e^\beta)^2-4e^\alpha e^\beta$이므로

$\left(\dfrac{3}{5}k\right)^2=k^2-4\times4$

$\dfrac{16}{25}k^2=16$

$k^2=25$

$k>4$이므로 $k=5$

답 ①

8 $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2g(x)-x}{2x-\pi}=b$에서 $x\to\dfrac{\pi}{2}$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

함수 $g(x)$는 $x=\dfrac{\pi}{2}$에서 연속이므로

$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\{2g(x)-x\}=0$에서 $2g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)-\dfrac{\pi}{2}=0$, $g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{4}$

$g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{4}$에서 $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\pi}{2}$이므로

$a\times\dfrac{\pi}{4}\times\tan\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$

$a=2$

이때 $h(x)=2g(x)-x$라 하면

$h\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)-\dfrac{\pi}{2}=0$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2g(x)-x}{2x-\pi}&=\frac{1}{2}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{h(x)-h\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}\\&=\frac{1}{2}h'\left(\frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

$h(x)=2g(x)-x$에서

$h'(x)=2g'(x)-1$이므로

$h'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2g'\left(\frac{\pi}{2}\right)-1$

한편, 역함수의 미분법에 의하여

$$g'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{f'\left(g\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)}=\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때

$f'(x)=(2x)'\times\tan x+2x\times(\tan x)'$

$=2\tan x+2x\sec^2 x$

이므로

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\tan\frac{\pi}{4}+2\times\frac{\pi}{4}\times\sec^2\frac{\pi}{4}=2+\pi$

즉, ㉠에서

$g'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{2+\pi}$

이므로

$h'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\times\frac{1}{2+\pi}-1=-\frac{\pi}{2+\pi}$

따라서 $b=\frac{1}{2}h'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2(2+\pi)}$이므로

$ab=2\times\left\{-\frac{\pi}{2(2+\pi)}\right\}=-\frac{\pi}{2+\pi}$

답 ⑤

Level 3 실력 완성

본문 56쪽

1 ② 2 ③ 3 ④

1 $0<x\le\frac{1}{2}$ 또는 $\frac{3}{2}\le x<2$에서 $\cos\pi x\ge0$,

$\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$에서 $\cos\pi x<0$이므로

$$f(x)=\begin{cases} e^{\cos\pi x} & \left(0<x\le\frac{1}{2} \text{ 또는 } \frac{3}{2}\le x<2\right) \\ e^{-\cos\pi x} & \left(\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}\right) \end{cases}$$

$(e^{\cos\pi x})'=e^{\cos\pi x}\times(\cos\pi x)'=-\pi e^{\cos\pi x}\sin\pi x$,

$(e^{-\cos\pi x})'=e^{-\cos\pi x}\times(-\cos\pi x)'=\pi e^{-\cos\pi x}\sin\pi x$

이므로

$$f'(x)=\begin{cases} -\pi e^{\cos\pi x}\sin\pi x & \left(0<x<\frac{1}{2} \text{ 또는 } \frac{3}{2}<x<2\right) \\ \pi e^{-\cos\pi x}\sin\pi x & \left(\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}\right) \end{cases}$$

이고 함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{2}$, $x=\frac{3}{2}$에서 미분가능하지 않다.

한편, 함수 $g(x)=ax^3+ax-2a+1$에서

$g'(x)=3ax^2+a$이고 $a>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)>0$이고, 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

또한 방정식 $x^3+x-2=0$의 실근은

$(x-1)(x^2+x+2)=0$에서 $x=1$뿐이므로

$g(x)=ax^3+ax-2a+1=a(x^3+x-2)+1$에서 곡선 $y=g(x)$는 a의 값에 관계없이 항상 점 $(1, 1)$을 지난다.

$h(x)=(f\circ g)(x)$라 하자.

만약 $0<x<2$인 모든 실수 x에 대하여 $\frac{1}{2}<g(x)<\frac{3}{2}$이면

$h(x)=f(g(x))=e^{-\cos\{\pi g(x)\}}$

이고 합성함수의 미분법에 의하여 함수 $h(x)$는 열린구간 $(0, 2)$에서 미분가능하다.

함수 $g(x)$는 열린구간 $(0, 2)$에서 증가하므로 $0<x<2$인 모든 실수 x에 대하여 $\frac{1}{2}<g(x)<\frac{3}{2}$이려면

$g(0)\ge\frac{1}{2}$, $g(2)\le\frac{3}{2}$을 만족시키면 된다.

$g(0)=-2a+1\ge\frac{1}{2}$에서 $a\le\frac{1}{4}$ $\cdots\cdots$ ㉠

$g(2)=8a+1\le\frac{3}{2}$에서 $a\le\frac{1}{16}$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a\le\frac{1}{16}$이다.

한편, $a>\frac{1}{16}$일 때, $g(1)=1<\frac{3}{2}$, $g(2)=8a+1>\frac{3}{2}$이고 함수 $g(x)$는 닫힌구간 $[1, 2]$에서 연속이므로 사잇값의 정리에 의하여 $g(c)=\frac{3}{2}$인 실수 c $(1<c<2)$가 존재한다.

이때 $p(x)=e^{-\cos\{\pi g(x)\}}$, $q(x)=e^{\cos\{\pi g(x)\}}$이라 하면

$p'(x)=\sin\{\pi g(x)\}\times\pi g'(x)\times e^{-\cos\{\pi g(x)\}}$,

$q'(x)=-\sin\{\pi g(x)\}\times\pi g'(x)\times e^{\cos\{\pi g(x)\}}$

에서 $p'(c)=-\pi g'(c)$, $q'(c)=\pi g'(c)$이고

$g'(c)>0$이므로

$$\lim_{x\to c-}\frac{h(x)-h(c)}{x-c}=\lim_{x\to c-}\frac{e^{-\cos\{\pi g(x)\}}-1}{x-c}$$
$$=p'(c)=-\pi g'(c)<0$$

$$\lim_{x\to c+}\frac{h(x)-h(c)}{x-c}=\lim_{x\to c+}\frac{e^{\cos\{\pi g(x)\}}-1}{x-c}$$
$$=q'(c)=\pi g'(c)>0$$

즉, 함수 $h(x)$는 $x=c$에서 미분가능하지 않다.

따라서 구하는 양수 a의 최댓값은 $\frac{1}{16}$이다.

답 ②

2 $f(x)=2tx-t\cos x-5\sin x$에서

$f'(x)=2t+t\sin x-5\cos x$ ...... ㉠

$f'(g(t))=0$이므로 ㉠의 양변에 $x=g(t)$를 대입하면

$2t+t\sin\{g(t)\}-5\cos\{g(t)\}=0$ ...... ㉡

$g(\alpha)=\frac{\pi}{6}$이므로 ㉡의 양변에 $t=\alpha$를 대입하면

$$2\alpha+\alpha\sin\frac{\pi}{6}-5\cos\frac{\pi}{6}=0$$

$$\frac{5}{2}\alpha-\frac{5\sqrt{3}}{2}=0$$

즉, $\alpha=\sqrt{3}$이고 α는 열린구간 $\left(0,\ \frac{5}{2}\right)$에 속한다.

함수 $g(t)$가 열린구간 $\left(0,\ \frac{5}{2}\right)$에서 미분가능하므로 ㉡의 양변을 t에 대하여 미분하면

$$2+\sin\{g(t)\}+t\times\cos\{g(t)\}\times g'(t)+5\sin\{g(t)\}\times g'(t)=0$$

위 식의 양변에 $t=\alpha$를 대입하면

$$2+\sin\{g(\alpha)\}+\alpha\times\cos\{g(\alpha)\}\times g'(\alpha)+5\sin\{g(\alpha)\}\times g'(\alpha)=0$$

이때 $\alpha=\sqrt{3}$, $g(\alpha)=\frac{\pi}{6}$이므로

$$2+\sin\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\times\cos\frac{\pi}{6}\times g'(\alpha)+5\times\sin\frac{\pi}{6}\times g'(\alpha)=0$$

$$2+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}g'(\alpha)+\frac{5}{2}g'(\alpha)=0$$

$$4g'(\alpha)=-\frac{5}{2}$$

$$g'(\alpha)=-\frac{5}{8}$$

따라서 $\alpha\times g'(\alpha)=\sqrt{3}\times\left(-\frac{5}{8}\right)=-\frac{5\sqrt{3}}{8}$

답 ③

3 $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{f(x)+g(x)}{(x-b)g\left(x-\frac{3}{2}\right)}=-\dfrac{4a^3+a}{2f''\left(\frac{3}{2}\right)}$에서 $x\to b$일 때

(분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to b}\{f(x)+g(x)\}=0$이고 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 연속이므로

$f(b)+g(b)=0$ ...... ㉠

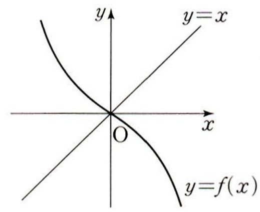
$f(x)=e^{ax}-e^{-ax}$에서

$f'(x)=ae^{ax}+ae^{-ax}=a(e^{ax}+e^{-ax})$

이때 $a<0$이고 모든 실수 x에 대하여 $e^{ax}+e^{-ax}>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)<0$이다.

즉, 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 감소한다.

또한 $f(0)=0$이므로 곡선 $y=f(x)$는 원점을 지나면서 제2사분면과 제4사분면만을 지나고, 곡선 $y=g(x)$는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 곡선 $y=g(x)$도 원점을 지나면서 제2사분면과 제4사분면만을 지난다.



$b>0$이면 $f(b)<0$, $g(b)<0$이므로 $f(b)+g(b)<0$이고,
$b<0$이면 $f(b)>0$, $g(b)>0$이므로 $f(b)+g(b)>0$이다.

즉, ㉠을 만족시키는 실수 b의 값은 0이다.

$f(0)=0$에서 $g(0)=0$이고,

$f'(0)=2a$, $g'(0)=\dfrac{1}{f'(g(0))}=\dfrac{1}{f'(0)}=\dfrac{1}{2a}$이므로

$$\lim_{x\to b}\frac{f(x)+g(x)}{(x-b)g\left(x-\frac{3}{2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+g(x)}{xg\left(x-\frac{3}{2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{f(x)-f(0)+g(x)-g(0)}{x}\times\frac{1}{g\left(x-\frac{3}{2}\right)}\right\}$$

$$=\{f'(0)+g'(0)\}\times\frac{1}{g\left(-\frac{3}{2}\right)}$$

$$=\left(2a+\frac{1}{2a}\right)\times\frac{1}{g\left(-\frac{3}{2}\right)} \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

한편, 모든 실수 x에 대하여

$f(-x)=e^{-ax}-e^{ax}=-f(x)$이고,

$f'(x)=a(e^{ax}+e^{-ax})$에서

$f''(x)=a^2(e^{ax}-e^{-ax})=a^2f(x)$이므로

$$f''\left(\frac{3}{2}\right)=a^2f\left(\frac{3}{2}\right)=-a^2f\left(-\frac{3}{2}\right)$$

즉,

$$-\frac{4a^3+a}{2f''\left(\frac{3}{2}\right)}=-\frac{4a^3+a}{2\times\left\{-a^2f\left(-\frac{3}{2}\right)\right\}}$$

$$=\frac{4a^3+a}{2a^2}\times\frac{1}{f\left(-\frac{3}{2}\right)}$$

$$=\left(2a+\frac{1}{2a}\right)\times\frac{1}{f\left(-\frac{3}{2}\right)} \qquad \cdots\cdots ㉢$$

㉡, ㉢에서 $f\left(-\frac{3}{2}\right)=g\left(-\frac{3}{2}\right)$이다.

$f\left(-\frac{3}{2}\right)=k$라 하면 $g\left(-\frac{3}{2}\right)=k$에서 $f(k)=-\frac{3}{2}$이므로 곡선 $y=f(x)$는 점 $\left(k,\ -\frac{3}{2}\right)$을 지난다.

$f\left(\frac{3}{2}\right)=-f\left(-\frac{3}{2}\right)=-k$이므로 곡선 $y=f(x)$는 점 $\left(\frac{3}{2},\ -k\right)$를 지난다.

이때 $k\neq\frac{3}{2}$이면 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $\left(k,\ -\frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2},\ -k\right)$를 지나는 직선의 기울기가

$$\frac{-k-\left(-\frac{3}{2}\right)}{\frac{3}{2}-k}=1$$

이므로 평균값 정리에 의하여 $f'(c)=1$인 c가 적어도 하나 존재한다.

그러나 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)<0$이므로 $f'(c)=1$인 c는 존재하지 않는다. 그러므로 $k=\frac{3}{2}$이다.

$f\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}$에서 $e^{-\frac{3}{2}a}-e^{\frac{3}{2}a}=\frac{3}{2}$

$e^{-\frac{3}{2}a}=t\ (t>1)$이라 하면

$t-\frac{1}{t}=\frac{3}{2}$

$2t^2-3t-2=0$

$(2t+1)(t-2)=0$

$t>1$이므로 $t=2$

따라서 $e^{-\frac{3}{2}a}=2$에서

$-\frac{3}{2}a=\ln 2$

$a=-\frac{2}{3}\ln 2$

답 ④

05 도함수의 활용

유제 본문 59~67쪽

1 ②	2 6	3 10	4 ②	5 ②
6 ②	7 5	8 ④	9 ③	10 ③

1 $y=\frac{e^x}{x}$에서 $y'=\frac{e^x\times x-e^x\times 1}{x^2}=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$

곡선 $y=\frac{e^x}{x}$ 위의 점 $\left(t,\ \frac{e^t}{t}\right)$에서의 접선의 기울기는 $\frac{e^t(t-1)}{t^2}$이고 접선의 방정식은

$y-\frac{e^t}{t}=\frac{e^t(t-1)}{t^2}(x-t)$

이 직선이 원점을 지나므로

$0-\frac{e^t}{t}=\frac{e^t(t-1)}{t^2}(0-t)$, $t=2$

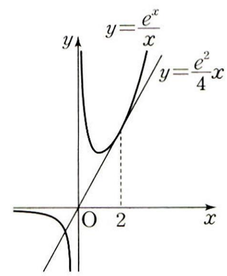
따라서 구하는 접선의 기울기는

$\frac{e^2\times(2-1)}{2^2}=\frac{e^2}{4}$

답 ②

참고

곡선 $y=\frac{e^x}{x}$과 원점에서 이 곡선에 그은 접선 $y=\frac{e^2}{4}x$는 그림과 같다.



2 $t=1$일 때 $x=\frac{6}{1+1}=3$, $y=1^3\times\ln 1+2=2$이므로 $t=1$에 대응하는 점의 좌표는 $(3,\ 2)$이다.

$x=\frac{6}{t+1}$에서 $\frac{dx}{dt}=-\frac{6}{(t+1)^2}$,

$y=t^3\ln t+2t$에서

$\frac{dy}{dt}=3t^2\ln t+t^3\times\frac{1}{t}+2=3t^2\ln t+t^2+2$

이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3t^2\ln t+t^2+2}{-\frac{6}{(t+1)^2}}$$

$t=1$에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는

$$\frac{0+1+2}{-\frac{6}{(1+1)^2}}=-2$$

이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-2=-2(x-3)$, 즉 $y=-2x+8$

따라서 $a=-2$, $b=8$이므로

$a+b=-2+8=6$

답 6

3 $f(x)=(x^2+6x+a)e^x$에서

$f'(x)=(2x+6)e^x+(x^2+6x+a)e^x$

$=(x^2+8x+6+a)e^x$

모든 실수 x에 대하여 $e^x>0$이다.

이때 이차방정식 $x^2+8x+6+a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4^2-(6+a)\le 0$에서 $a\ge 10$

(i) $a>10$일 때, 모든 실수 x에 대하여 $x^2+8x+6+a>0$ 이고 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가함수이다.

(ii) $a=10$일 때, $f'(-4)=0$이지만 $x\ne -4$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가함수이다.

(i), (ii)에서 $a\ge 10$일 때 $f(x)$는 역함수를 갖는다.

따라서 실수 a의 최솟값은 10이다.

답 10

4 $y=\frac{3x}{x^2+2}$에서

$$y'=\frac{3\times(x^2+2)-3x\times 2x}{(x^2+2)^2}=\frac{6-3x^2}{(x^2+2)^2}$$

이므로

$$y''=\frac{-6x\times(x^2+2)^2-(6-3x^2)\times 2(x^2+2)\times 2x}{(x^2+2)^4}$$

$$=\frac{-6x(x^2+2)-12x(2-x^2)}{(x^2+2)^3}$$

$$=\frac{6x(x^2-6)}{(x^2+2)^3}$$

$y''=0$에서 $x=0$ 또는 $x=-\sqrt{6}$ 또는 $x=\sqrt{6}$

$x=0$의 좌우, $x=-\sqrt{6}$의 좌우, $x=\sqrt{6}$의 좌우에서 각각 y''의 부호가 바뀌므로 곡선 $y=\frac{3x}{x^2+2}$의 변곡점은

$(0,\ 0)$, $\left(-\sqrt{6},\ -\frac{3\sqrt{6}}{8}\right)$, $\left(\sqrt{6},\ \frac{3\sqrt{6}}{8}\right)$

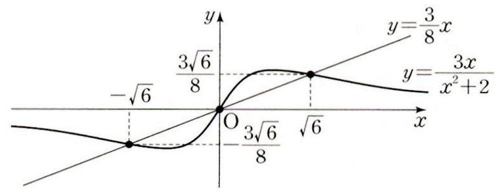
이고, 세 점은 모두 직선 $y=\frac{3}{8}x$ 위에 있다.

따라서 $m=\frac{3}{8}$

답 ②

참고

곡선 $y=\frac{3x}{x^2+2}$와 세 변곡점은 그림과 같다.



5 $f(x)=\cos x+x\sin x$에서

$f'(x)=-\sin x+(\sin x+x\cos x)$

$=x\cos x$

$0\le x\le \pi$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$

닫힌구간 $[0,\ \pi]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	1	↗	$\frac{\pi}{2}$	↘	−1

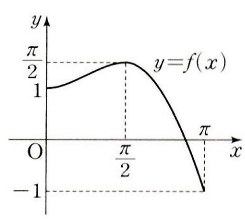
그러므로 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{2}$일 때 최댓값 $\frac{\pi}{2}$를 갖고, $x=\pi$일 때 최솟값 -1을 갖는다.

따라서 $M\times m=\frac{\pi}{2}\times(-1)=-\frac{\pi}{2}$

답 ②

참고

닫힌구간 $[0,\ \pi]$에서 함수 $f(x)=\cos x+x\sin x$의 그래프는 그림과 같다.



6 $f(x)=(x-a)e^{-ax}$에서

$f'(x)=e^{-ax}+(x-a)\times(-a)\times e^{-ax}=e^{-ax}(1-ax+a^2)$

$f'(x)=0$에서 $x=\dfrac{a^2+1}{a}$

닫힌구간 $[1,\ 3]$에서 함수 $f(x)=(x-a)e^{-ax}$이 $x=\dfrac{5}{2}$일 때 최댓값을 가지므로 $f'\left(\dfrac{5}{2}\right)=0$이다.

$\dfrac{a^2+1}{a}=\dfrac{5}{2}$에서

$2a^2+2=5a,\ (2a-1)(a-2)=0$

$a=\dfrac{1}{2}$ 또는 $a=2$

이때 $a=2$이면 함수 $f(x)=(x-2)e^{-2x}$에서

$f(1)=-e^{-2}<0$

이므로 닫힌구간 $[1,\ 3]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 음수이다.

$a=\dfrac{1}{2}$이면 함수 $f(x)=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)e^{-\frac{1}{2}x}$에서

$f(1)=\dfrac{1}{2\sqrt{e}}>0,\ f(3)=\dfrac{5}{2e\sqrt{e}}>0$

이므로 닫힌구간 $[1,\ 3]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 양수이다.

즉, $a=\dfrac{1}{2}$이고 함수 $f(x)$의 최댓값은

$M=f\left(\dfrac{5}{2}\right)=\left(\dfrac{5}{2}-\dfrac{1}{2}\right)e^{-\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}}=2e^{-\frac{5}{4}}$

따라서 $a\times M=\dfrac{1}{2}\times 2e^{-\frac{5}{4}}=e^{-\frac{5}{4}}$

답 ②

참고

$2<e<3$이므로 $a=\dfrac{1}{2}$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최솟값을 갖는다.

7 $(x-a)^2=4e^{x-7}$에서 $(x-a)^2e^{-x+7}=4$

$f(x)=(x-a)^2e^{-x+7}$이라 하면 주어진 방정식은 방정식 $f(x)=4$와 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=4$가 서로 다른 두 점에서만 만나도록 하는 상수 a의 값을 구하면 된다.

$f'(x)=2(x-a)e^{-x+7}-(x-a)^2e^{-x+7}$

$\quad=-(x-a)(x-a-2)e^{-x+7}$

이므로 $f'(x)=0$에서 $x=a$ 또는 $x=a+2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	a	$\cdots$	$a+2$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	0	↗	$4e^{-a+5}$	↘

함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극솟값 0을 갖고, $x=a+2$에서 극댓값 $4e^{-a+5}$을 갖는다.

이때 $t=x-a$라 하면 $x\to\infty$일 때 $t\to\infty$이고

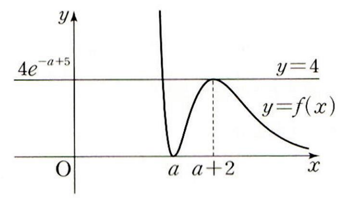
$\lim_{t\to\infty}t^2e^{-t}=0$이므로 다음이 성립한다.

$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}(x-a)^2e^{-x+7}$

$\quad=e^{7-a}\lim_{x\to\infty}(x-a)^2e^{-(x-a)}$

$\quad=e^{7-a}\lim_{t\to\infty}t^2e^{-t}=0$

또한 $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



즉, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=4$가 서로 다른 두 점에서만 만나려면 $4e^{-a+5}=4$이어야 하므로

$e^{-a+5}=1,\ -a+5=0$

따라서 $a=5$

답 5

8 $3\tan x\geq 4x+a$에서 $3\tan x-4x\geq a$

$f(x)=3\tan x-4x$라 하면 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq a$가 성립해야 한다.

$f'(x)=3\sec^2 x-4$이므로

$f'(x)=0$에서 $\sec^2 x=\dfrac{4}{3},\ \cos^2 x=\dfrac{3}{4}$

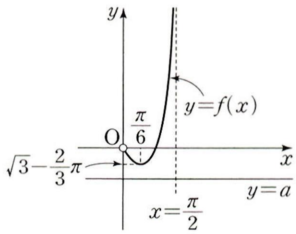
$0<x<\dfrac{\pi}{2}$이므로 $\cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ x=\dfrac{\pi}{6}$

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	극소	↗	

이때 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{\pi}{6}$에서 극소인 동시에 최소이므로 함수 $f(x)$의 최솟값은

$f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=3\tan\dfrac{\pi}{6}-4\times\dfrac{\pi}{6}=\sqrt{3}-\dfrac{2}{3}\pi$



따라서 $0<x<\frac{\pi}{2}$에서 $f(x)\geq a$가 성립하려면

$a\leq\sqrt{3}-\frac{2}{3}\pi$이어야 하므로 a의 최댓값은 $\sqrt{3}-\frac{2}{3}\pi$이다.

답 ④

9 $x=a\ln t$, $y=t+\frac{b}{t}$에서

$\frac{dx}{dt}=\frac{a}{t}$, $\frac{dy}{dt}=1-\frac{b}{t^2}$

이므로 점 P의 시각 $t=2$에서의 속도는 $\left(\frac{a}{2}, 1-\frac{b}{4}\right)$이다.

$\frac{a}{2}=b$, $1-\frac{b}{4}=a$이므로 두 식을 연립하여 풀면

$a=\frac{8}{9}$, $b=\frac{4}{9}$

따라서 $a+b=\frac{8}{9}+\frac{4}{9}=\frac{4}{3}$

답 ③

10 $x=e^t-4t$, $y=-e^t+1$에서

$\frac{dx}{dt}=e^t-4$, $\frac{dy}{dt}=-e^t$

점 P의 시각 $t\ (t>0)$에서의 속도는 $(e^t-4,\ -e^t)$이므로

점 P의 속력은 $\sqrt{(e^t-4)^2+(-e^t)^2}$이다.

$$\begin{aligned}\sqrt{(e^t-4)^2+(-e^t)^2}&=\sqrt{e^{2t}-8e^t+16+e^{2t}}\\&=\sqrt{2(e^{2t}-4e^t+8)}\\&=\sqrt{2(e^t-2)^2+8}\end{aligned}$$

이므로 점 P의 속력은 $e^t=2$, 즉 $t=\ln 2$일 때 최솟값 $2\sqrt{2}$를 갖는다.

따라서 점 P의 속력의 최솟값은 $2\sqrt{2}$이다.

답 ③

Level 1 기초 연습

본문 68~69쪽

1 ①	2 ⑤	3 ②	4 ①	5 4
6 ⑤	7 ①	8 ④		

1 $y=(x+2)e^x$에서

$y'=e^x+(x+2)e^x=(x+3)e^x$

이므로 곡선 $y=(x+2)e^x$ 위의 점 $(t,\ (t+2)e^t)$에서의 접선의 기울기는 $(t+3)e^t$이고 접선의 방정식은

$y-(t+2)e^t=(t+3)e^t\times(x-t)$

이 직선이 점 $(2, 0)$을 지나므로

$0-(t+2)e^t=(t+3)e^t\times(2-t)$

$-(t+2)=(t+3)(2-t)$

$t^2=8$

$t=2\sqrt{2}$ 또는 $t=-2\sqrt{2}$

$t=2\sqrt{2}$일 때 접선의 기울기는 $(2\sqrt{2}+3)e^{2\sqrt{2}}$,

$t=-2\sqrt{2}$일 때 접선의 기울기는 $(-2\sqrt{2}+3)e^{-2\sqrt{2}}$이다.

따라서 두 접선의 기울기의 곱은

$(2\sqrt{2}+3)e^{2\sqrt{2}}\times(-2\sqrt{2}+3)e^{-2\sqrt{2}}=1$

답 ①

2 $f(x)=(1+\sin x)\cos x$에서

$$\begin{aligned}f'(x)&=\cos x\times\cos x+(1+\sin x)\times(-\sin x)\\&=\cos^2 x-\sin x-\sin^2 x\\&=(1-\sin^2 x)-\sin x-\sin^2 x\\&=-2\sin^2 x-\sin x+1\\&=-(2\sin x-1)(\sin x+1)\end{aligned}$$

$0\leq x\leq 2\pi$일 때,

$f'(x)=0$에서 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$

닫힌구간 $[0, 2\pi]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		+	0	−	0	+	0	+	
$f(x)$	1	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↗	0	↗	1

그러므로 함수 $f(x)=(1+\sin x)\cos x$가 열린구간 (a, b)에서 증가할 때, $b-a$의 값이 최대가 되도록 하는 두 실수 a, b는 $a=\frac{5}{6}\pi$, $b=2\pi$이다.

따라서 $b-a$의 최댓값은 $2\pi-\frac{5}{6}\pi=\frac{7}{6}\pi$이다.

답 ⑤

3 $f(x)=|x^2-3|e^{-x}=|(x^2-3)e^{-x}|$이므로

$g(x)=(x^2-3)e^{-x}$이라 하면

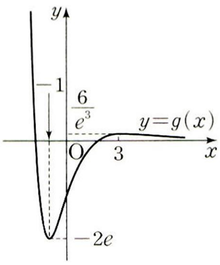
$$\begin{aligned}g'(x)&=2xe^{-x}-(x^2-3)e^{-x}=-(x^2-2x-3)e^{-x}\\&=-(x+1)(x-3)e^{-x}\end{aligned}$$

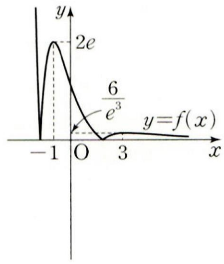
$g'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $g(x)$는 $x=-1$에서 극솟값 $g(-1)=-2e$를 갖고, $x=3$에서 극댓값 $g(3)=\dfrac{6}{e^3}$을 갖는다.





이때 $f(x)=|g(x)|$이고 $g(-1)=-2e<0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 $|g(-1)|=2e$를 갖고, $x=3$에서 극댓값 $\dfrac{6}{e^3}$을 갖는다.

따라서 함수 $f(x)$의 모든 극댓값의 곱은

$2e\times\dfrac{6}{e^3}=\dfrac{12}{e^2}$

답 ②

4 ㄱ. $f''(-1)=0$이고 $x=-1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 점 $(-1,\ f(-1))$은 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다. (참)

ㄴ. 열린구간 $(2,\ 5)$에서 $f''(x)>0$이므로 곡선 $y=f(x)$는 열린구간 $(2,\ 5)$에서 아래로 볼록하다. (거짓)

ㄷ. $f''(0)<0$이므로 $f'(0)=0$이면 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖는다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ이다.

답 ①

5 모든 실수 x에 대하여 $x^2-2x+9=(x-1)^2+8\geq 8$이므로 함수 $f(x)$의 정의역은 실수 전체의 집합이다.

$f(x)=\dfrac{8x}{x^2-2x+9}$에서

$$f'(x)=\frac{8(x^2-2x+9)-8x\times(2x-2)}{(x^2-2x+9)^2}$$

$$=\frac{-8x^2+72}{(x^2-2x+9)^2}=\frac{-8(x+3)(x-3)}{(x^2-2x+9)^2}$$

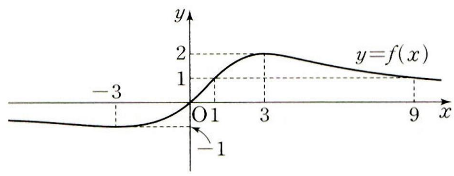
$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-1	↗	2	↘

함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극솟값 -1, $x=3$에서 극댓값 2를 갖는다.

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$이고, $x>0$이면 $f(x)>0$, $x<0$이면 $f(x)<0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $f(x)$가 $x=3$에서 최댓값 2를 가지므로 닫힌구간 $[a,\ a+6]$에서 최댓값이 2이려면

$a\leq 3\leq a+6$

이어야 한다.

즉, $-3\leq a\leq 3$ $\cdots\cdots$ ㉠

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[a,\ a+6]$에서 연속이고, 이때 최솟값 1은 함수 $f(x)$의 극값이 아니므로 $f(a)=1$ 또는 $f(a+6)=1$이어야 한다.

방정식 $f(x)=1$에서

$\dfrac{8x}{x^2-2x+9}=1$

$x^2-10x+9=0$

$(x-1)(x-9)=0$

$x=1$ 또는 $x=9$

$f(a)=1$에서 $a=1$ 또는 $a=9$ $\cdots\cdots$ ㉡

$f(a+6)=1$에서 $a=-5$ 또는 $a=3$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉡, ㉢에서 ㉠을 만족시키는 a의 값은 1 또는 3이다.

$a=1$일 때, 닫힌구간 $[1,\ 7]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(3)=2$, 최솟값은 $f(1)=1$이다.

$a=3$일 때, 닫힌구간 $[3,\ 9]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(3)=2$, 최솟값은 $f(9)=1$이다.

따라서 구하는 모든 실수 a의 값의 합은

$1+3=4$

답 4

6 ㄱ. $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$에서

$$f'(x)=\frac{1\times\ln x-x\times\dfrac{1}{x}}{(\ln x)^2}$$

$$=\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$$

$f'(x)=0$에서 $\ln x-1=0$, $x=e$

$x=e$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=e$에서 극솟값을 갖는다. (참)

ㄴ. $f'(x)=\dfrac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$에서

$$f''(x)=\frac{\dfrac{1}{x}\times(\ln x)^2-(\ln x-1)\times 2\ln x\times\dfrac{1}{x}}{(\ln x)^4}$$

$$=\frac{\ln x-2(\ln x-1)}{x(\ln x)^3}$$

$$=\frac{2-\ln x}{x(\ln x)^3}$$

$f''(x)=0$에서 $2-\ln x=0$, $x=e^2$

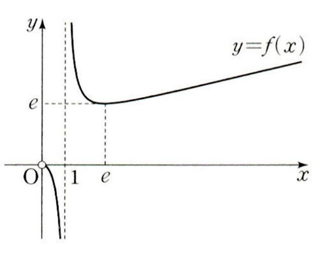
$f(e^2)=\dfrac{e^2}{2}$이고, $x=e^2$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 점 $\left(e^2, \dfrac{e^2}{2}\right)$은 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다. (참)

ㄷ. $\ln x=0$에서 $x=1$이므로 함수 $f(x)$의 정의역은 $(0, 1)\cup(1, \infty)$이다.

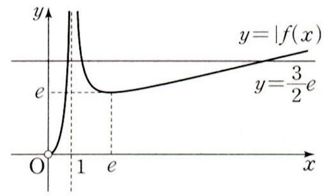
ㄱ에서 $f'(x)=\dfrac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$이고 $f'(x)=0$에서 $x=e$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	(1)	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘		↘	극소	↗

함수 $f(x)$의 극솟값은 $f(e)=e$이고 $\lim_{x\to 0+}f(x)=0$, $\lim_{x\to 1-}f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to 1+}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



방정식 $|f(x)|=\dfrac{3}{2}e$의 서로 다른 실근의 개수는 곡선 $y=|f(x)|$와 직선 $y=\dfrac{3}{2}e$의 교점의 개수와 같다.



이때 $\dfrac{3}{2}e>e=f(e)$이므로 위의 그림과 같이 곡선 $y=|f(x)|$와 직선 $y=\dfrac{3}{2}e$는 서로 다른 세 점에서 만난다. 따라서 방정식 $|f(x)|=\dfrac{3}{2}e$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

7 $\ln 2x\le\dfrac{x}{e^2}+k$에서 $\ln 2x-\dfrac{x}{e^2}\le k$

$f(x)=\ln 2x-\dfrac{x}{e^2}$라 하면 모든 양의 실수 x에 대하여 $f(x)\le k$가 성립해야 한다.

$f'(x)=\dfrac{2}{2x}-\dfrac{1}{e^2}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^2}$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=e^2$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	e^2	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	극대	↘

이때 함수 $f(x)$는 $x=e^2$에서 극대인 동시에 최대이므로 함수 $f(x)$의 최댓값은

$$f(e^2)=\ln 2e^2-\frac{e^2}{e^2}=(2+\ln 2)-1=1+\ln 2$$

따라서 모든 양의 실수 x에 대하여 $f(x)\le k$가 성립하려면 $k\ge 1+\ln 2$이어야 하므로 k의 최솟값은 $1+\ln 2$이다.

답 ①

8 시각 $t=a$에서 점 P가 x축 위에 있으므로 점 P의 y좌표가 0이다.

즉, $\sqrt{3}\sin 2a-\cos 2a=0$

$0<a<\frac{\pi}{4}$, 즉 $0<2a<\frac{\pi}{2}$일 때, $\cos 2a \neq 0$이므로

$\frac{\sin 2a}{\cos 2a}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\tan 2a=\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\cdots\cdots$ ㉠

$x=\sqrt{2}\cos 2t+2$, $y=\sqrt{3}\sin 2t-\cos 2t$에서

$\frac{dx}{dt}=-2\sqrt{2}\sin 2t$, $\frac{dy}{dt}=2\sqrt{3}\cos 2t+2\sin 2t$

$0<2a<\frac{\pi}{2}$이므로 ㉠에서 $2a=\frac{\pi}{6}$이다.

이때 $\sin 2a=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$, $\cos 2a=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

이므로 시각 $t=a$에서의 점 P의 속도는

$\left(-2\sqrt{2}\times\frac{1}{2},\ 2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+2\times\frac{1}{2}\right)$, 즉 $(-\sqrt{2},\ 4)$이다.

따라서 시각 $t=a$에서의 점 P의 속력은

$\sqrt{(-\sqrt{2})^2+4^2}=3\sqrt{2}$

답 ④

Level 2 기본 연습

본문 70~71쪽

1 9	2 ④	3 ④	4 ③	5 ①
6 ⑤	7 ④	8 ③		

1 점 P의 x좌표를 p라 하면 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 점 $\mathrm{P}(p,\ 0)$에서 만나므로

$f(p)=g(p)=0$

$f(p)=0$에서 $p+a=1$ $\cdots\cdots$ ㉠

$g(p)=0$에서 $b\left(p+6+\frac{8}{p}\right)=0$

$b\neq 0$이므로

$p+6+\frac{8}{p}=0$

$p^2+6p+8=0$

$(p+2)(p+4)=0$

$p=-2$ 또는 $p=-4$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선과 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 P에서의 접선이 일치하므로

$f'(p)=g'(p)$ $\cdots\cdots$ ㉡

$f(x)=2\ln(x+a)$에서 $f'(x)=\frac{2}{x+a}$

$g(x)=b\left(x+6+\frac{8}{x}\right)$에서 $g'(x)=b\left(1-\frac{8}{x^2}\right)$

이때 ㉠에 의하여 $f'(p)=\frac{2}{p+a}=2$이므로

㉡에서 $g'(p)=2$이어야 한다.

$p=-2$이면 $g'(p)=b\times\left\{1-\frac{8}{(-2)^2}\right\}=-b$

$p=-4$이면 $g'(p)=b\times\left\{1-\frac{8}{(-4)^2}\right\}=\frac{1}{2}b$

$b>0$이므로 $-b<0$, $\frac{1}{2}b>0$

즉, $g'(p)=2$이려면 $p=-4$이고, $\frac{1}{2}b=2$에서 $b=4$이다.

$p=-4$이므로 ㉠에서 $a=5$

따라서 $a+b=5+4=9$

답 9

2 $f(x)=a^2\sin x+a\cos x+2x$에서

$f'(x)=a^2\cos x-a\sin x+2$

함수 $f(x)$가 $x=\frac{3}{2}\pi$에서 극값을 가지므로 $f'\left(\frac{3}{2}\pi\right)=0$

이다.

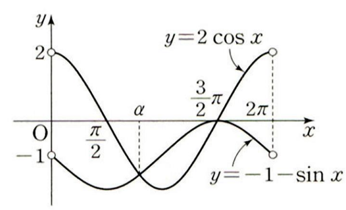
$f'\left(\frac{3}{2}\pi\right)=0+a+2=0$에서 $a=-2$

즉, $f(x)=4\sin x-2\cos x+2x$이고

$f'(x)=4\cos x+2\sin x+2$

$f'(x)=0$에서 $2\cos x=-1-\sin x$이므로 방정식

$f'(x)=0$의 실근은 두 곡선 $y=2\cos x$, $y=-1-\sin x$의 교점의 x좌표와 같다.



그림과 같이 열린구간 $(0,\ 2\pi)$에서 두 곡선 $y=2\cos x$, $y=-1-\sin x$는 $x=\alpha\left(\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi\right)$, $x=\frac{3}{2}\pi$에서 만나고, 이때 $k=\alpha$이다.

또한 $x=\alpha$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 극댓값을 갖고, $x=\frac{3}{2}\pi$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=\frac{3}{2}\pi$에서 극솟값을 갖는다.

한편, $2\cos\alpha=-1-\sin\alpha$에서 양변을 제곱하면

$4\cos^2\alpha=1+2\sin\alpha+\sin^2\alpha$

$4(1-\sin^2\alpha)=1+2\sin\alpha+\sin^2\alpha$

$5\sin^2\alpha+2\sin\alpha-3=0$

$(5\sin\alpha-3)(\sin\alpha+1)=0$

$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$에서 $\sin\alpha>0$이므로

$\sin\alpha=\frac{3}{5}$

또한 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$에서 $\cos\alpha<0$이므로

$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=-\frac{4}{5}$

즉,

$m=f(\alpha)$

$=4\sin\alpha-2\cos\alpha+2\alpha$

$=4\times\frac{3}{5}-2\times\left(-\frac{4}{5}\right)+2\alpha$

$=4+2\alpha$

따라서 $m+\alpha k=(4+2\alpha)+(-2)\times\alpha=4$

답 ④

3 $y=(\ln 2x)^2+3$에서

$y'=2\ln 2x\times(\ln 2x)'$

$=2\ln 2x\times\frac{(2x)'}{2x}$

$=\frac{2\ln 2x}{x}$

이므로

$y''=\frac{(2\ln 2x)'\times x-2\ln 2x\times(x)'}{x^2}$

$=\frac{\frac{2\times(2x)'}{2x}\times x-2\ln 2x}{x^2}$

$=\frac{2-2\ln 2x}{x^2}$

$y''=0$에서 $2-2\ln 2x=0$

$\ln 2x=1$, $x=\frac{e}{2}$

$x=\frac{e}{2}$의 좌우에서 y''의 부호가 바뀌므로 곡선 $y=(\ln 2x)^2+3$의 변곡점의 좌표는 $\left(\frac{e}{2},\ 4\right)$이다.

$x=\frac{e}{2}$일 때 $y'=\frac{2\ln\left(2\times\frac{e}{2}\right)}{\frac{e}{2}}=\frac{4}{e}$이므로 점 $\left(\frac{e}{2},\ 4\right)$에서의 접선의 방정식은

$y-4=\frac{4}{e}\left(x-\frac{e}{2}\right)$, 즉 $y=\frac{4}{e}x+2$

따라서 $a=\frac{4}{e}$, $b=2$이므로

$ab=\frac{4}{e}\times 2=\frac{8}{e}$

답 ④

4 ㄱ. $f(x)=(x^2+a)e^x$에서

$f'(x)=2xe^x+(x^2+a)e^x$

$=(x^2+2x+a)e^x$

$f'(x)=0$에서 $x^2+2x+a=0$

이 이차방정식이 서로 다른 두 실근 $x=\alpha$, $x=\beta$ $(\alpha<\beta)$를 가져야 $x=\alpha$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호는 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 극댓값을 갖고, $x=\beta$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호는 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=\beta$에서 극솟값을 갖는다.

이차방정식 $x^2+2x+a=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=1-a>0$

이므로 함수 $f(x)$가 극값을 갖기 위한 a의 값의 범위는 $a<1$이다. (참)

ㄴ. $f'(x)=(x^2+2x+a)e^x$에서

$f''(x)=(2x+2)e^x+(x^2+2x+a)e^x$

$=(x^2+4x+2+a)e^x$

$f''(x)=0$에서 $x^2+4x+2+a=0$

곡선 $y=f(x)$의 변곡점이 존재하므로 이차방정식 $x^2+4x+2+a=0$은 실근을 갖는다.

만약 이 이차방정식이 중근 $x=\alpha$를 갖게 될 경우 $x=\alpha$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 곡선 $y=f(x)$는 변곡점을 갖지 않는다.

즉, 이차방정식 $x^2+4x+2+a=0$은 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2+4x+2+a=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=2^2-(2+a)=2-a>0$

이므로 곡선 $y=f(x)$가 변곡점을 갖기 위한 a의 값의 범위는 $a<2$이다.

ㄱ에서 함수 $f(x)$가 극값을 갖기 위한 a의 값의 범위는 $a<1$이다.

따라서 $1\le a<2$이면 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이 존재하지만 함수 $f(x)$는 극값을 갖지 않는다. (거짓)

ㄷ. $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$이라 하자.

$a>0$에서 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\neq 0$이므로 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

$g'(x)=-\dfrac{f'(x)}{\{f(x)\}^2}$이므로

$g'(x)=0$에서 $f'(x)=0$, 즉 $(x^2+2x+a)e^x=0$이다.

함수 $g(x)$가 극댓값과 극솟값을 가지려면 이차방정식 $x^2+2x+a=0$이 서로 다른 두 실근 $x=\alpha$, $x=\beta$ $(\alpha<\beta)$를 가져야 하므로 ㄱ에서 $a<1$이다.

따라서 $0<a<1$이다.

이때 $x=\alpha$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호는 양에서 음으로 바뀌므로 $g'(x)$의 부호는 음에서 양으로 바뀐다. 그러므로 함수 $g(x)$는 $x=\alpha$에서 극솟값을 갖는다.

또 $x=\beta$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호는 음에서 양으로 바뀌므로 $g'(x)$의 부호는 양에서 음으로 바뀐다. 그러므로 함수 $g(x)$는 $x=\beta$에서 극댓값을 갖는다.

α, β는 이차방정식 $x^2+2x+a=0$의 서로 다른 두 실근이므로 $\alpha^2+a=-2\alpha$, $\beta^2+a=-2\beta$이고

$$M=\frac{1}{f(\beta)}=\frac{1}{(\beta^2+a)e^\beta}=-\frac{1}{2\beta e^\beta}$$

$$m=\frac{1}{f(\alpha)}=\frac{1}{(\alpha^2+a)e^\alpha}=-\frac{1}{2\alpha e^\alpha}$$

또한 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=a$이므로

$$M\times m=\left(-\frac{1}{2\beta e^\beta}\right)\times\left(-\frac{1}{2\alpha e^\alpha}\right)$$
$$=\frac{1}{4\alpha\beta e^{\alpha+\beta}}=\frac{e^2}{4a}$$

$0<a<1$이므로 $M\times m=\dfrac{e^2}{4a}>\dfrac{e^2}{4}$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

5 $f(x)=\ln(1+e^x)-tx$에서 $f'(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}-t$

$f'(x)=0$에서 $\dfrac{e^x}{1+e^x}=t$

$e^x=\dfrac{t}{1-t}$이고 $0<t<1$이므로 $x=\ln\dfrac{t}{1-t}$

이때 $f''(x)=\dfrac{e^x(1+e^x)-e^x\times e^x}{(1+e^x)^2}=\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$에서

$$f''\left(\ln\frac{t}{1-t}\right)=\frac{\frac{t}{1-t}}{\left(1+\frac{t}{1-t}\right)^2}=t(1-t)>0$$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=\ln\dfrac{t}{1-t}$에서 극솟값 $f\left(\ln\dfrac{t}{1-t}\right)$를 갖는다.

$$g(t)=f\left(\ln\frac{t}{1-t}\right)$$
$$=\ln\left(1+\frac{t}{1-t}\right)-t\ln\frac{t}{1-t}$$
$$=\ln\frac{1}{1-t}-t\ln\frac{t}{1-t}$$
$$=-\ln(1-t)-t\{\ln t-\ln(1-t)\}$$
$$=(t-1)\ln(1-t)-t\ln t$$

에서

$$g'(t)=\ln(1-t)+(t-1)\times\frac{-1}{1-t}-\left(\ln t+t\times\frac{1}{t}\right)$$
$$=\ln(1-t)+1-(\ln t+1)$$
$$=\ln(1-t)-\ln t$$

$g'(t)=0$에서 $\ln(1-t)=\ln t$, $t=\dfrac{1}{2}$

$0<t<1$에서 함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	(1)
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$		↗	극대	↘	

이때 함수 $g(t)$는 $t=\dfrac{1}{2}$에서 극대인 동시에 최대이므로 함수 $g(t)$의 최댓값은

$$g\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}=\ln 2$$

답 ①

6 $0<t<\dfrac{\pi}{2}$인 실수 t에 대하여 접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$라 하면 접선의 방정식은

$y-f(t)=f'(t)(x-t)$

이므로 접선의 y절편은 $-tf'(t)+f(t)$이다.

이때 $g(t)=-tf'(t)+f(t)$ $\left(0<t<\dfrac{\pi}{2}\right)$라 하면

$g'(t)=-f'(t)-tf''(t)+f'(t)=-tf''(t)$

이므로 $g'(t)=0$에서 $f''(t)=0$이다.

$f(x)=\cos^2 x+7\cos x$에서

$f'(x)=-2\cos x\sin x-7\sin x$이므로

$$f''(x)=2\sin^2 x-2\cos^2 x-7\cos x$$
$$=2(1-\cos^2 x)-2\cos^2 x-7\cos x$$
$$=-4\cos^2 x-7\cos x+2$$
$$=-(4\cos x-1)(\cos x+2)$$

$f''(t)=0$에서 $\cos t=\frac{1}{4}$

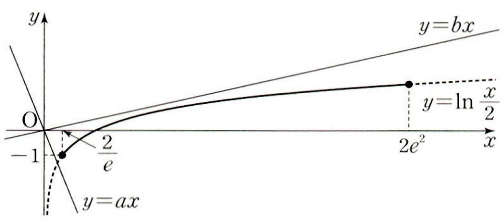
$\cos\alpha=\frac{1}{4}$인 실수 $\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$에 대하여 $t=\alpha$의 좌우에서 $g'(t)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $g(t)$는 $t=\alpha$에서 극댓값 $g(\alpha)$를 갖고 이는 함수 $g(t)$의 최댓값이다.

따라서 구하는 점 P의 y좌표는

$f(\alpha)=\cos^2\alpha+7\cos\alpha=\left(\frac{1}{4}\right)^2+7\times\frac{1}{4}=\frac{29}{16}$

답 ⑤

7 함수 $y=\ln\frac{x}{2}$의 그래프는 그림과 같다.



$\frac{2}{e}\le x\le 2e^2$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $ax\le\ln\frac{x}{2}$가 성립할 때, 실수 a의 값이 최대인 경우는 직선 $y=ax$가 점 $\left(\frac{2}{e}, -1\right)$을 지나는 경우이므로

$a\le-\frac{e}{2}$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\frac{2}{e}\le x\le 2e^2$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $\ln\frac{x}{2}\le bx$가 성립하도록 하는 실수 b의 값의 범위를 구하기 위해 원점에서 곡선 $y=\ln\frac{x}{2}$에 그은 접선의 방정식을 구해 보자.

$y=\ln\frac{x}{2}$에서 $y'=\frac{1}{x}$이므로 곡선 $y=\ln\frac{x}{2}$ 위의 점 $\left(t, \ln\frac{t}{2}\right)$에서의 접선의 기울기는 $\frac{1}{t}$이고 접선의 방정식은

$y-\ln\frac{t}{2}=\frac{1}{t}(x-t)$

이 직선이 원점을 지나므로

$0-\ln\frac{t}{2}=\frac{1}{t}\times(0-t)$, $-\ln\frac{t}{2}=-1$

$t=2e$

즉, 원점에서 곡선 $y=\ln\frac{x}{2}$에 그은 접선의 방정식은

$y=\frac{1}{2e}x$이고, 이때 접점의 좌표는 $(2e, 1)$이다.

$\frac{2}{e}<2e<2e^2$이고 곡선 $y=\ln\frac{x}{2}$가 위로 볼록하므로 b의 최솟값은 $\frac{1}{2e}$이다.

따라서 $b-a$의 최솟값은 $\frac{1}{2e}-\left(-\frac{e}{2}\right)=\frac{e^2+1}{2e}$이다.

답 ④

다른 풀이

$\frac{2}{e}\le x\le 2e^2$에서 $x>0$이므로 주어진 부등식은

$a\le\frac{\ln\frac{x}{2}}{x}\le b$와 같다.

$f(x)=\frac{\ln\frac{x}{2}}{x}=\frac{\ln x-\ln 2}{x}$라 하면

$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x-(\ln x-\ln 2)\times 1}{x^2}=\frac{1-\ln x+\ln 2}{x^2}$

$f'(x)=0$에서 $1-\ln x+\ln 2=0$

$\ln x=1+\ln 2=\ln 2e$, $x=2e$

닫힌구간 $\left[\frac{2}{e}, 2e^2\right]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\frac{2}{e}$	$\cdots$	$2e$	$\cdots$	$2e^2$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\frac{e}{2}$	↗	$\frac{1}{2e}$	↘	$\frac{1}{e^2}$

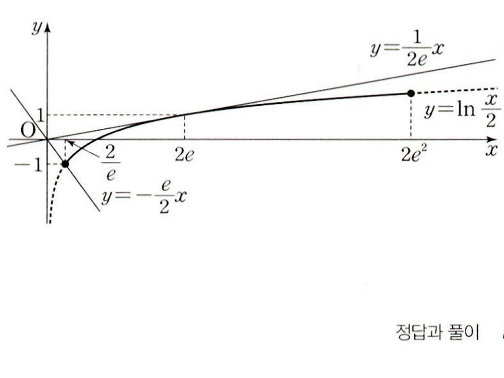
함수 $f(x)$는 $x=\frac{2}{e}$에서 최솟값 $-\frac{e}{2}$, $x=2e$에서 최댓값 $\frac{1}{2e}$을 가지므로 부등식 $a\le\frac{\ln\frac{x}{2}}{x}\le b$가 성립하려면

$a\le-\frac{e}{2}$, $b\ge\frac{1}{2e}$이어야 한다.

따라서 $b-a$의 최솟값은 $\frac{1}{2e}-\left(-\frac{e}{2}\right)=\frac{e^2+1}{2e}$이다.

참고

$\frac{2}{e}\le x\le 2e^2$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $ax\le\ln\frac{x}{2}\le bx$가 성립할 때, $b-a$의 값이 최소인 경우는 그림과 같다.



8 $x=t-2\cos t$, $y=1-a\sin t$에서

$\frac{dx}{dt}=1+2\sin t$, $\frac{dy}{dt}=-a\cos t$

$\frac{d^2x}{dt^2}=2\cos t$, $\frac{d^2y}{dt^2}=a\sin t$

이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도의 크기는

$\sqrt{(2\cos t)^2+(a\sin t)^2}=\sqrt{4\cos^2 t+a^2\sin^2 t}$

(i) $a\geq 2$인 경우

$a^2-4\geq 0$이므로

$4\cos^2 t+a^2\sin^2 t=4(1-\sin^2 t)+a^2\sin^2 t$

$=4+(a^2-4)\sin^2 t\geq 4$

에서 점 P의 가속도의 크기는 $t=\pi$일 때 $\sqrt{4}=2$로 최소이다.

(ii) $0<a<2$인 경우

$4-a^2>0$이므로

$4\cos^2 t+a^2\sin^2 t=4\cos^2 t+a^2(1-\cos^2 t)$

$=(4-a^2)\cos^2 t+a^2\geq a^2$

에서 점 P의 가속도의 크기는 $t=\frac{\pi}{2}$, $t=\frac{3}{2}\pi$일 때

$\sqrt{a^2}=a$로 최소이다.

(i), (ii)에서 점 P의 가속도의 크기의 최솟값이 $\sqrt{3}$이려면 $a=\sqrt{3}$이어야 한다.

이때 점 P의 시각 t에서의 속력은

$\sqrt{(1+2\sin t)^2+(-\sqrt{3}\cos t)^2}$

$=\sqrt{1+4\sin t+4\sin^2 t+3\cos^2 t}$

$=\sqrt{4+4\sin t+\sin^2 t}$

$=\sqrt{(2+\sin t)^2}$

$=2+\sin t$

이므로 점 P의 속력은 $t=\frac{\pi}{2}$일 때 최댓값 $2+\sin\frac{\pi}{2}=3$을 갖는다.

따라서 점 P의 속력의 최댓값은 3이다.

답 ③

Level 3 실력 완성

본문 72쪽

1 ② **2** 5 **3** 4

1 ㄱ. 두 직선 l, m이 서로 평행하면 $f'(a)=f'(b)$이다.

로그의 진수 조건에 의하여 $x>0$이므로 함수 $f(x)$의 정의역은 구간 $(0, \infty)$이다.

$f(x)=2\sqrt{x}-\ln x$에서

$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{x}-1}{x}$

이므로

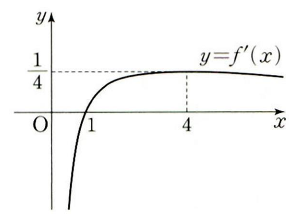
$f''(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\times x-(\sqrt{x}-1)\times 1}{x^2}=-\frac{\sqrt{x}-2}{2x^2}$

$f''(x)=0$에서 $x=4$

$x>0$에서 함수 $f'(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	4	$\cdots$
$f''(x)$		$+$	0	$-$
$f'(x)$		↗	극대	↘

$\lim_{x\to 0+}f'(x)=-\infty$, $\lim_{x\to\infty}f'(x)=0$이고 $f'(4)=\frac{1}{4}$이므로 함수 $y=f'(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$a<b$인 서로 다른 두 실수 a, b에 대하여

$f'(a)=f'(b)$라 하면 $1<a<4$, $b>4$이므로 $ab>4$이다. (참)

ㄴ. 함수 $f(x)$는 구간 $(1, \infty)$에서 연속이고 미분가능하므로 $1<a<b$인 임의의 두 실수 a, b에 대하여 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$인 실수 c가 열린 구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

이때 $x>1$에서 $0<f'(x)\leq\frac{1}{4}$이므로

$0<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leq\frac{1}{4}$이다.

따라서 $0<$(직선 AB의 기울기)$\leq\frac{1}{4}$이다. (참)

ㄷ. 두 직선 l, m의 기울기는 각각 $f'(a)$, $f'(b)$이므로 두 직선 l, m이 서로 수직이면 $f'(a)f'(b)=-1$이다.

$a<b$이므로 ㄱ의 함수 $y=f'(x)$의 그래프에서

$f'(a)<0<f'(b)$이어야 하고, $0<f'(b)\leq\frac{1}{4}$이다.

$|f'(a)-f'(b)|=f'(b)-f'(a)$

$=f'(b)-\left(-\frac{1}{f'(b)}\right)$

$=f'(b)+\dfrac{1}{f'(b)}$

에서 $f'(b)=t$라 하고 $g(t)=t+\dfrac{1}{t}$이라 하자.

$g'(t)=1-\dfrac{1}{t^2}$이므로 $0<t\le\dfrac{1}{4}$인 모든 실수 t에 대하여 $g'(t)<0$이다.

즉, 구간 $\left(0,\ \dfrac{1}{4}\right]$에서 함수 $g(t)$는 감소하므로 이 구간에서 함수 $g(t)$의 최솟값은 $g\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{\frac{1}{4}}=\dfrac{17}{4}$이다.

따라서 $|f'(a)-f'(b)|$의 최솟값은 $\dfrac{17}{4}$이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

2 $f(x)=\ln(n+x)-\ln(n-x)$라 하자.

로그의 진수 조건에 의하여 $n+x>0$, $n-x>0$이므로

$-n<x<n$

즉, 함수 $f(x)$의 정의역은 열린구간 $(-n,\ n)$이다.

$f'(x)=\dfrac{1}{n+x}-\dfrac{-1}{n-x}=\dfrac{2n}{n^2-x^2}$

이므로 $-n<x<n$에서 $f'(x)>0$

$f''(x)=-\dfrac{2n\times(-2x)}{(n^2-x^2)^2}=\dfrac{4nx}{(n^2-x^2)^2}$

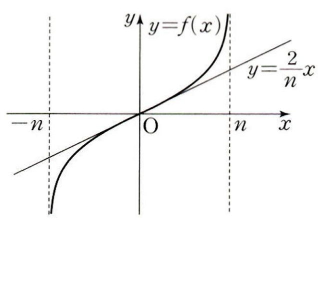
이므로 $f''(x)=0$에서 $x=0$

$-n<x<n$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$(-n)$	$\cdots$	0	$\cdots$	(n)
$f'(x)$		$+$	$+$	$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	0	↗	

$-n<x<n$인 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이므로 곡선 $y=f(x)$는 원점에 대하여 대칭이다.

또한 $\lim\limits_{x\to -n+} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to n-} f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



이때 $f'(0)=\dfrac{2}{n}$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선의 방정식은 $y=\dfrac{2}{n}x$이다.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=kx$가 만나는 서로 다른 점의 개수가 a_n이므로

$k\le\dfrac{2}{n}$이면 $a_n=1$, $k>\dfrac{2}{n}$이면 $a_n=3$ $\cdots\cdots$ ㉠

$a_n=1$인 자연수 n의 최댓값을 m이라 하면

$a_n=\begin{cases}1 & (1\le n\le m)\\ 3 & (n>m)\end{cases}$

$m\ge 10$이면 $\sum\limits_{n=1}^{10}a_n=\sum\limits_{n=1}^{10}1=10$이므로 문제의 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 $m<10$이다.

이때

$\sum\limits_{n=1}^{10}a_n=\sum\limits_{n=1}^{m}a_n+\sum\limits_{n=m+1}^{10}a_n$

$=\sum\limits_{n=1}^{m}1+\sum\limits_{n=m+1}^{10}3$

$=m+3(10-m)$

$=30-2m$

이므로 $30-2m=16$에서 $m=7$

즉, $a_7=1$, $a_8=3$이므로 ㉠에 의하여

$k\le\dfrac{2}{7}$, $k>\dfrac{2}{8}=\dfrac{1}{4}$

그러므로 구하는 모든 실수 k의 값의 범위는

$\dfrac{1}{4}<k\le\dfrac{2}{7}$

따라서 $p=\dfrac{1}{4}$, $q=\dfrac{2}{7}$이므로

$70pq=70\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{2}{7}=5$

답 5

3 함수 $f(x)$는 $f(0)=0$인 이차함수이므로

$f(x)=ax^2+bx$ (a, b는 상수, $a\ne0$)이라 하면

$f'(x)=2ax+b$

$g(x)=f'(x)e^{-f(x)}=(2ax+b)e^{-f(x)}$에서

$g'(x)=2ae^{-f(x)}-(2ax+b)^2e^{-f(x)}$

$=\{2a-(2ax+b)^2\}e^{-f(x)}$ $\cdots\cdots$ ㉠

조건 (가)에서 $g'(0)=0$이므로

$2a-b^2=0$, $b^2=2a$ $\cdots\cdots$ ㉡

$a\ne0$이므로 $b\ne0$, $a=\dfrac{b^2}{2}>0$이고, ㉡을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned} g'(x) &= \{b^2-(b^2x+b)^2\}e^{-f(x)} \\ &= b^2\{1-(bx+1)^2\}e^{-f(x)} \\ &= b^2(-b^2x^2-2bx)e^{-f(x)} \\ &= -b^4x\left(x+\frac{2}{b}\right)e^{-f(x)} \end{aligned}$$

$g'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=-\frac{2}{b}$

(i) $b>0$인 경우

$b>0$에서 $-\frac{2}{b}<0$이고, 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{2}{b}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

$f(x)=\frac{b^2}{2}x^2+bx$, $f'(x)=b^2x+b$에서

$f\left(-\frac{2}{b}\right)=\frac{b^2}{2}\times\left(-\frac{2}{b}\right)^2+b\times\left(-\frac{2}{b}\right)=0$,

$f'\left(-\frac{2}{b}\right)=b^2\times\left(-\frac{2}{b}\right)+b=-b$

이므로 함수 $g(x)$는 $x=-\frac{2}{b}$에서 극솟값

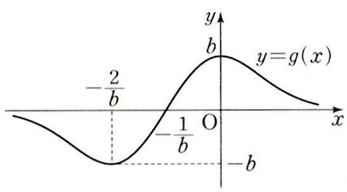
$g\left(-\frac{2}{b}\right)=f'\left(-\frac{2}{b}\right)e^{-f\left(-\frac{2}{b}\right)}=-b$를 갖고,

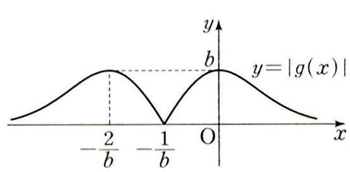
$f(0)=0$, $f'(0)=b$이므로 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극댓값 $g(0)=f'(0)e^{-f(0)}=b$를 갖는다.

함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표는 $g(x)=f'(x)e^{-f(x)}=0$에서

$f'(x)=b^2x+b=0$, $x=-\frac{1}{b}$

즉, $g\left(-\frac{1}{b}\right)=0$이고, $\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}g(x)=0$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프와 함수 $y=|g(x)|$의 그래프는 그림과 같다.





이때 함수 $h(t)$는 함수 $y=|g(x)|$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점 중 x좌표가 양수인 것의 개수이므로

$$h(t)=\begin{cases} 0 & (t\le 0) \\ 1 & (0<t<b) \\ 0 & (t\ge b) \end{cases}$$

임의의 양수 k에 대하여 $0<g(k)<b$이므로

$\lim_{t\to g(k)+}h(t)=\lim_{t\to g(k)-}h(t)=1$이다.

그러므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $b<0$인 경우

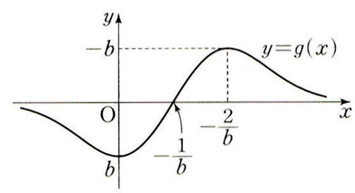
$b<0$에서 $-\frac{2}{b}>0$이고, 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

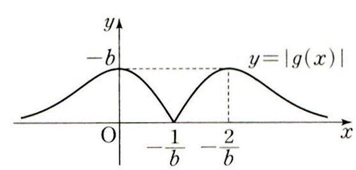
x	$\cdots$	0	$\cdots$	$-\frac{2}{b}$	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극솟값 $g(0)=b$를 갖고,

$x=-\frac{2}{b}$에서 극댓값 $g\left(-\frac{2}{b}\right)=-b$를 갖는다.

또한 $g\left(-\frac{1}{b}\right)=0$, $\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}g(x)=0$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프와 함수 $y=|g(x)|$의 그래프는 그림과 같다.

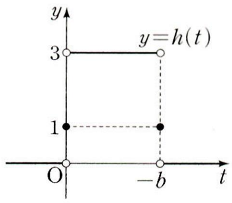




이때 함수 $h(t)$는 함수 $y=|g(x)|$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점 중 x좌표가 양수인 것의 개수이므로

$$h(t)=\begin{cases} 0 & (t<0) \\ 1 & (t=0) \\ 3 & (0<t<-b) \\ 1 & (t=-b) \\ 0 & (t>-b) \end{cases}$$

이고 함수 $y=h(t)$의 그래프는 그림과 같다.



임의의 양수 k에 대하여 $b<g(k)\le -b$이므로

$\lim_{t\to g(k)+} h(t) \ne \lim_{t\to g(k)-} h(t)$를 만족시키는 $g(k)$의 값은 0, $-b$이다.

$g(k)=0$에서 양수 k의 값은 $-\frac{1}{b}$이고,

$g(k)=-b$에서 양수 k의 값은 $-\frac{2}{b}$이다.

$k\ne -\frac{1}{b}$, $k\ne -\frac{2}{b}$인 모든 양수 k에 대하여

$0<|g(k)|<-b$이므로 $\lim_{t\to g(k)+} h(t) = \lim_{t\to g(k)-} h(t)$이다.

그러므로 $-\frac{1}{b}+\left(-\frac{2}{b}\right)=3$, 즉 $b=-1$일 때 조건 (나)를 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $b=-1$이고 이를 ㉡에 대입하면 $a=\frac{1}{2}$이므로

$f(x)=\frac{1}{2}x^2-x$

따라서 $f(4)=\frac{1}{2}\times 4^2-4=4$

답 4

06 여러 가지 적분법

유제

본문 75~81쪽

1 ④	2 ②	3 ①	4 ④	5 ②
6 ④	7 ③	8 ②		

1 $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx=\int x^{-\frac{1}{2}}dx$

$$=\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1}+C$$

$$=2x^{\frac{1}{2}}+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

즉, $f(x)=2x^{\frac{1}{2}}+C$이고

$f(1)=2+C=2$

이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=2x^{\frac{1}{2}}$이므로

$f(4)=2\times 4^{\frac{1}{2}}=2\times 2=4$

답 ④

2 $f'(x)=\sin x+2x$이고

$\int(\sin x+2x)\,dx=-\cos x+x^2+C$ (단, C는 적분상수)

이므로

$f(x)=-\cos x+x^2+C$

이때 $f(0)=2$이므로

$f(0)=-1+C=2$

즉, $C=3$이므로 $f(x)=-\cos x+x^2+3$

따라서

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos x+x^2+3)\,dx$$

$$=\left[-\sin x+\frac{1}{3}x^3+3x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-1+\frac{\pi^3}{24}+\frac{3}{2}\pi$$

$$=\frac{\pi^3}{24}+\frac{3}{2}\pi-1$$

답 ②

3 $\ln x=t$로 놓으면

$x=1$일 때 $t=0$, $x=e$일 때 $t=1$이고,

$\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$이므로

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx=\int_0^1 t\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{2}$$

답 ①

4 $\int_0^1 2x\sqrt{x^2+1}\,dx-\int_{\sqrt{3}}^1 2x\sqrt{x^2+1}\,dx$

$=\int_0^1 2x\sqrt{x^2+1}\,dx+\int_1^{\sqrt{3}} 2x\sqrt{x^2+1}\,dx$

$=\int_0^{\sqrt{3}} 2x\sqrt{x^2+1}\,dx$

$x^2+1=t$로 놓으면

$x=0$일 때 $t=1$, $x=\sqrt{3}$일 때 $t=4$이고,

$2x=\frac{dt}{dx}$이므로

$$\int_0^{\sqrt{3}} 2x\sqrt{x^2+1}\,dx=\int_1^4 \sqrt{t}\,dt$$
$$=\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^4$$
$$=\frac{2}{3}\times 4^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}$$
$$=\frac{2}{3}\times 8-\frac{2}{3}=\frac{14}{3}$$

답 ④

5 $u(x)=\ln x$, $v'(x)=x^2$으로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=\frac{1}{3}x^3$이므로

$$\int_1^e x^2\ln x\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3\ln x\right]_1^e-\int_1^e \frac{1}{3}x^2dx$$
$$=\frac{1}{3}e^3-\left[\frac{1}{9}x^3\right]_1^e$$
$$=\frac{1}{3}e^3-\left(\frac{1}{9}e^3-\frac{1}{9}\right)$$
$$=\frac{2e^3+1}{9}$$

답 ②

6 $\cos\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)=\sin x$이므로

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\cos\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$$

$h(x)=x\sin x$라 하면

$h(-x)=-x\sin(-x)=x\sin x=h(x)$

이므로

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$$

이때 $u(x)=x$, $v'(x)=\sin x$로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=-\cos x$이므로

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx=2\left(\left[-x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx\right)$$
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx$$
$$=2\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=2$$

답 ④

7 주어진 등식에 $x=1$을 대입하면

$\int_1^1 f(t)\,dt=e+a$

이때 $\int_1^1 f(t)\,dt=0$이므로

$0=e+a$, $a=-e$

또한 $\int_x^1 f(t)\,dt=-\int_1^x f(t)\,dt=xe^x-e$에서

$\int_1^x f(t)\,dt=-xe^x+e$

이므로 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=-e^x-xe^x$

따라서 $f\left(\frac{a}{e}\right)=f(-1)=-e^{-1}+e^{-1}=0$

답 ③

8 함수 $f(x)=\sin\frac{x}{2}$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1}{x^2-\pi^2}\int_\pi^x \sin\frac{t}{2}dt$$
$$=\lim_{x\to\pi}\frac{1}{x^2-\pi^2}\times\left[F(t)\right]_\pi^x$$
$$=\lim_{x\to\pi}\frac{F(x)-F(\pi)}{x^2-\pi^2}$$
$$=\lim_{x\to\pi}\left\{\frac{1}{x+\pi}\times\frac{F(x)-F(\pi)}{x-\pi}\right\}$$
$$=\frac{1}{2\pi}\times F'(\pi)$$
$$=\frac{1}{2\pi}\times f(\pi)$$
$$=\frac{1}{2\pi}\times\sin\frac{\pi}{2}$$
$$=\frac{1}{2\pi}\times 1=\frac{1}{2\pi}$$

답 ②

Level 1 기초 연습

본문 82쪽

1 ② 2 ① 3 ④ 4 ② 5 ②

1 $\int_2^3 \frac{x^2-1}{(x-1)(x+2)}dx=\int_2^3 \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)}dx$

$=\int_2^3 \frac{x+1}{x+2}dx$

$=\int_2^3 \left(1-\frac{1}{x+2}\right)dx$

$=\left[x-\ln|x+2|\right]_2^3$

$=(3-\ln 5)-(2-\ln 4)$

$=1-\ln 5+\ln 4$

$=\ln e-\ln 5+\ln 4$

$=\ln \frac{4}{5}e$

답 ②

2 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$이므로

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x\,dx$

$\sin x=t$로 놓으면

$x=0$일 때 $t=0$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=1$이고,

$\cos x=\frac{dt}{dx}$이므로

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x\,dx=\int_0^1 t\,dt$

$=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1$

$=\frac{1}{2}$

답 ①

3 $u_1(x)=(\ln x)^2$, $v_1'(x)=x$로 놓으면

$u_1'(x)=2\ln x\times\frac{1}{x}$, $v_1(x)=\frac{1}{2}x^2$이므로

$\int_1^e x(\ln x)^2dx=\left[(\ln x)^2\times\frac{1}{2}x^2\right]_1^e-\int_1^e x\ln x\,dx$

$=\frac{1}{2}e^2-\int_1^e x\ln x\,dx$

또한 $u_2(x)=\ln x$, $v_2'(x)=x$로 놓으면

$u_2'(x)=\frac{1}{x}$, $v_2(x)=\frac{1}{2}x^2$이므로

$\int_1^e x\ln x\,dx=\left[\ln x\times\frac{1}{2}x^2\right]_1^e-\int_1^e \frac{1}{2}x\,dx$

$=\frac{1}{2}e^2-\left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^e$

$=\frac{1}{2}e^2-\left(\frac{1}{4}e^2-\frac{1}{4}\right)$

$=\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}$

따라서

$\int_1^e x(\ln x)^2dx=\frac{1}{2}e^2-\left(\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}\right)$

$=\frac{e^2-1}{4}$

답 ④

4 $g(x)=\int f(x)\,dx=\int e^{\sqrt{x}}dx$에서

$\sqrt{x}=t$로 놓으면 $\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{dt}{dx}$이므로

$\int e^{\sqrt{x}}dx=\int (e^t\times 2t)\,dt$

이때 $u(t)=2t$, $v'(t)=e^t$으로 놓으면

$u'(t)=2$, $v(t)=e^t$이므로

$\int (e^t\times 2t)\,dt=2te^t-\int 2e^t\,dt$

$=2te^t-2e^t+C$ (단, C는 적분상수)

따라서

$g(x)=2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}-2e^{\sqrt{x}}+C$

이고 $g(1)=0$이므로

$g(1)=2e-2e+C=0$, $C=0$

즉, $g(x)=2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}-2e^{\sqrt{x}}$이므로

$g(4)=2\sqrt{4}e^{\sqrt{4}}-2e^{\sqrt{4}}$

$=4e^2-2e^2$

$=2e^2$

답 ②

5 $f(x)=\int_0^x te^t\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=xe^x$이므로

$f'(1)=e$

또한 $f(2)=\int_0^2 te^t\,dt$에서

$u(t)=t$, $v'(t)=e^t$으로 놓으면

$u'(t)=1$, $v(t)=e^t$이므로

$$f(2)=\int_0^2 te^t\,dt$$
$$=\Big[te^t\Big]_0^2-\int_0^2 e^t\,dt$$
$$=2e^2-\Big[e^t\Big]_0^2$$
$$=2e^2-(e^2-1)$$
$$=e^2+1$$

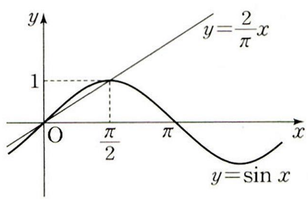
따라서 $\dfrac{f(2)}{f'(1)}=\dfrac{e^2+1}{e}=e+\dfrac{1}{e}$

답 ②

Level 2 기본 연습 본문 83쪽

1 ④ 2 ① 3 ① 4 ③

1 $0\le x\le\frac{2}{3}\pi$에서 곡선 $y=\sin x$와 직선 $y=\frac{2}{\pi}x$는 그림과 같이 두 점 $(0, 0)$, $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$에서 만난다.



즉, $0\le x\le\frac{\pi}{2}$일 때 $\sin x\ge\frac{2}{\pi}x$이고, $\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{2}{3}\pi$일 때 $\sin x\le\frac{2}{\pi}x$이므로

$$\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\left|\sin x-\frac{2}{\pi}x\right|dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin x-\frac{2}{\pi}x\right)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi}\left(\frac{2}{\pi}x-\sin x\right)dx$$
$$=\Big[-\cos x-\frac{1}{\pi}x^2\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\Big[\frac{1}{\pi}x^2+\cos x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi}$$
$$=-\frac{1}{\pi}\times\frac{\pi^2}{4}+1+\left(\frac{1}{\pi}\times\frac{4}{9}\pi^2-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{\pi}\times\frac{\pi^2}{4}$$
$$=-\frac{\pi}{4}+1+\left(\frac{4}{9}\pi-\frac{1}{2}\right)-\frac{\pi}{4}$$
$$=\frac{9-\pi}{18}$$

답 ④

2 $e^t=y$로 놓으면
$t=0$일 때 $y=1$, $t=1$일 때 $y=e$이고,
$e^t=\frac{dy}{dt}$이므로

$$f(x)=\int_0^1\frac{1}{4+(x-1)e^t}dt$$
$$=\int_1^e\left\{\frac{1}{4+(x-1)y}\times\frac{1}{y}\right\}dy$$
$$=\int_1^e\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{y}-\frac{x-1}{4+(x-1)y}\right\}dy$$
$$=\frac{1}{4}\int_1^e\left\{\frac{1}{y}-\frac{x-1}{4+(x-1)y}\right\}dy$$
$$=\frac{1}{4}\Big[\ln|y|-\ln|4+(x-1)y|\Big]_1^e$$
$$=\frac{1}{4}\{1-\ln|4+(x-1)e|+\ln|x+3|\}$$

따라서

$$f'(x)=\frac{1}{4}\left\{-\frac{e}{4+(x-1)e}+\frac{1}{x+3}\right\}$$

이므로

$$f'(2)=\frac{1}{4}\left(-\frac{e}{4+e}+\frac{1}{5}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\times\frac{-4e+4}{5(e+4)}$$
$$=\frac{1-e}{5(e+4)}$$

답 ①

3 $f(x)=\int_x^{2x}\frac{\ln t}{t^2}dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=\frac{\ln 2x}{(2x)^2}\times(2x)'-\frac{\ln x}{x^2}$$
$$=\frac{\ln 2x-2\ln x}{2x^2}$$
$$=\frac{\ln 2-\ln x}{2x^2}$$

$f'(x)=0$에서 $x=2$
$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		+	0	−
$f(x)$		↗	극대	↘

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극대인 동시에 최대이므로 $a=2$이고

$$b=f(2)=\int_2^4\frac{\ln t}{t^2}dt$$

이때 $u(t)=\ln t$, $v'(t)=\frac{1}{t^2}$로 놓으면

$u'(t)=\frac{1}{t}$, $v(t)=-\frac{1}{t}$이므로

$$b=\int_2^4 \frac{\ln t}{t^2}dt$$
$$=\left[-\frac{\ln t}{t}\right]_2^4+\int_2^4 \frac{1}{t^2}dt$$
$$=-\frac{\ln 4}{4}+\frac{\ln 2}{2}+\left[-\frac{1}{t}\right]_2^4$$
$$=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{4}$$

따라서 $ab=2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

답 ①

4 $2\pi\int_0^{2x}|t-x|\cos 2\pi t\,dt$

$$=2\pi\int_0^{x}(x-t)\cos 2\pi t\,dt+2\pi\int_x^{2x}(t-x)\cos 2\pi t\,dt$$

이때 $u(t)=x-t$, $v'(t)=\cos 2\pi t$로 놓으면

$u'(t)=-1$, $v(t)=\frac{1}{2\pi}\sin 2\pi t$이므로

$$\int_0^x (x-t)\cos 2\pi t\,dt$$
$$=\left[(x-t)\times\frac{1}{2\pi}\sin 2\pi t\right]_0^x+\frac{1}{2\pi}\int_0^x \sin 2\pi t\,dt$$
$$=\frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{2\pi}\cos 2\pi t\right]_0^x$$
$$=-\frac{1}{4\pi^2}\cos 2\pi x+\frac{1}{4\pi^2}$$

즉, $2\pi\int_0^x (x-t)\cos 2\pi t\,dt=-\frac{1}{2\pi}\cos 2\pi x+\frac{1}{2\pi}$

또한

$$\int_x^{2x}(t-x)\cos 2\pi t\,dt=-\int_x^{2x}(x-t)\cos 2\pi t\,dt$$

이므로

$$\int_x^{2x}(x-t)\cos 2\pi t\,dt$$
$$=\left[(x-t)\times\frac{1}{2\pi}\sin 2\pi t\right]_x^{2x}+\frac{1}{2\pi}\int_x^{2x}\sin 2\pi t\,dt$$
$$=-\frac{x}{2\pi}\sin 4\pi x+\frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{2\pi}\cos 2\pi t\right]_x^{2x}$$
$$=-\frac{x}{2\pi}\sin 4\pi x-\frac{1}{4\pi^2}\cos 4\pi x+\frac{1}{4\pi^2}\cos 2\pi x$$

즉,

$$2\pi\int_x^{2x}(t-x)\cos 2\pi t\,dt$$
$$=-2\pi\int_x^{2x}(x-t)\cos 2\pi t\,dt$$
$$=x\sin 4\pi x+\frac{1}{2\pi}\cos 4\pi x-\frac{1}{2\pi}\cos 2\pi x$$

이므로

$$2\pi\int_0^{2x}|t-x|\cos 2\pi t\,dt$$
$$=-\frac{1}{2\pi}\cos 2\pi x+\frac{1}{2\pi}+x\sin 4\pi x$$
$$+\frac{1}{2\pi}\cos 4\pi x-\frac{1}{2\pi}\cos 2\pi x$$
$$=-\frac{1}{\pi}\cos 2\pi x+\frac{1}{2\pi}+x\sin 4\pi x+\frac{1}{2\pi}\cos 4\pi x$$

따라서 주어진 방정식은

$$-\frac{1}{\pi}\cos 2\pi x+\frac{1}{2\pi}+x\sin 4\pi x+\frac{1}{2\pi}\cos 4\pi x=x\sin 4\pi x$$

$$-\frac{1}{\pi}\cos 2\pi x+\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{2\pi}\cos 4\pi x=0$$

$$-\cos 2\pi x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 4\pi x=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때

$$\cos 4\pi x=\cos^2 2\pi x-\sin^2 2\pi x$$
$$=\cos^2 2\pi x-(1-\cos^2 2\pi x)$$
$$=2\cos^2 2\pi x-1$$

이므로 ㉠에 대입하면

$$-\cos 2\pi x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(2\cos^2 2\pi x-1)=0$$

$\cos 2\pi x(\cos 2\pi x-1)=0$

$\cos 2\pi x=0$ 또는 $\cos 2\pi x=1$

$0\le x\le 1$이므로 방정식의 서로 다른 실근은

$x=0$ 또는 $x=\frac{1}{4}$ 또는 $x=\frac{3}{4}$ 또는 $x=1$

이고, 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

답 ③

Level 3 실력 완성 본문 84쪽

1 ② 2 ② 3 ⑤

1 $g(x)=x^2+\int_0^1 (x+t)g(t)\,dt$

$=x^2+x\int_0^1 g(t)\,dt+\int_0^1 tg(t)\,dt$

에서 $\int_0^1 g(t)\,dt=a$, $\int_0^1 tg(t)\,dt=b$라 하면

$g(x)=x^2+ax+b$이므로

$$\int_0^1 g(t)\,dt=\int_0^1 (t^2+at+b)\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{a}{2}t^2+bt\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{a}{2}+b=a$$

에서 $3a-6b=2$ …… ㉠

$$\int_0^1 tg(t)\,dt=\int_0^1 t(t^2+at+b)\,dt$$
$$=\int_0^1 (t^3+at^2+bt)\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{4}t^4+\frac{a}{3}t^3+\frac{b}{2}t^2\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=b$$

에서 $4a-6b=-3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-5$, $b=-\frac{17}{6}$

이므로 $g(x)=x^2-5x-\frac{17}{6}$

또한 $h(x)=\int_0^{g(x)} e^{f(t)}\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$h'(x)=e^{f(g(x))}\times g'(x)$

이고 $e^{f(g(x))}>0$이므로 $h'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $g'(x)=0$을 만족시키는 x의 값과 일치한다.

이때 $g'(x)=2x-5$이므로

$g'(x)=0$에서 $x=\frac{5}{2}$

즉, 함수 $h(x)$는 $x=\frac{5}{2}$에서 극솟값을 가지므로 $k=\frac{5}{2}$이다.

따라서 $g(2k)=g(5)=5^2-5^2-\frac{17}{6}=-\frac{17}{6}$

답 ②

참고

$h(x)=\int_0^{g(x)} e^{f(t)}\,dt$에서

$\int e^{f(t)}\,dt=F(t)+C$ (C는 적분상수)라 하면

$h(x)=\int_0^{g(x)} e^{f(t)}\,dt=\Big[F(t)\Big]_0^{g(x)}=F(g(x))-F(0)$

따라서 $h'(x)=F'(g(x))\times g'(x)=e^{f(g(x))}\times g'(x)$

2 조건 (가)에 의하여

$g(x)=-(x-a)(x-a-2)$

이때 $g(-1)=1$이므로

$-(-1-a)(-1-a-2)=1$

$(a+1)(a+3)=-1$

$a^2+4a+4=0$

$(a+2)^2=0$

따라서 $a=-2$이므로

$g(x)=-(x+2)x=-x^2-2x$

또한 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프와 이차함수 $y=g(x)$의 그래프가 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ $(a<b)$에서만 만나므로 방정식 $f(x)=g(x)$, 즉 $f(x)-g(x)=0$의 두 실근이 a, b이다.

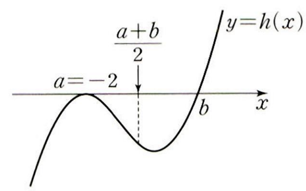
이때 $h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$h(x)=(x-a)^2(x-b)=(x+2)^2(x-b)$ …… ㉠

또는

$h(x)=(x-a)(x-b)^2=(x+2)(x-b)^2$ …… ㉡

㉠에서 함수 $y=h(x)$의 그래프는 [그림 1]과 같다.



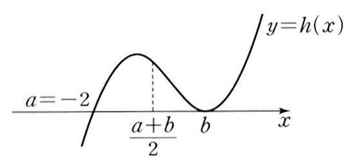
[그림 1]

이때

$h\left(\frac{a+b}{2}\right)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)-g\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$

이므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

㉡에서 함수 $y=h(x)$의 그래프는 [그림 2]와 같다.



[그림 2]

이때

$h\left(\frac{a+b}{2}\right)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)-g\left(\frac{a+b}{2}\right)>0$

이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

즉, $h(x)=f(x)-g(x)=(x+2)(x-b)^2$이므로

$f(x)=(x+2)(x-b)^2+g(x)$

$=(x+2)(x-b)^2-x^2-2x$

$f'(x)=(x-b)^2+2(x+2)(x-b)-2x-2$

$f''(x)=2(x-b)+2(x-b)+2(x+2)-2$

$=6x-4b+2$

이므로

$f''(1)=6-4b+2=0$에서 $b=2$

따라서

$f(x)=(x+2)(x-2)^2-x(x+2)$

$=(x+2)(x^2-5x+4)$

$=(x+2)(x-1)(x-4)$

이므로

$$\int_5^6 \frac{\left(\frac{5}{x}-2\right)g(x)}{f(x)}dx=\int_5^6 \frac{\left(\frac{5}{x}-2\right)\{-x(x+2)\}}{(x+2)(x-1)(x-4)}dx$$

$$=\int_5^6 \frac{(2x-5)(x+2)}{(x+2)(x-1)(x-4)}dx$$

$$=\int_5^6 \frac{2x-5}{(x-1)(x-4)}dx$$

$$=\int_5^6 \left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-4}\right)dx$$

$$=\Big[\ln|x-1|+\ln|x-4|\Big]_5^6$$

$$=\ln 5+\ln 2-\ln 4$$

$$=\ln\frac{5\times 2}{4}$$

$$=\ln\frac{5}{2}$$

답 ②

3 조건 (가)에 의하여 모든 실수 x에 대하여

$f'(-x)\times(-x)'=f'(x)$

즉, $-f'(-x)=f'(x)$에서

$f'(-x)=-f'(x)$

이때 $g(x)=\dfrac{xf'(x)}{1+\pi^{f'(x)}}$라 하면

$$g(-x)=\frac{-xf'(-x)}{1+\pi^{f'(-x)}}=\frac{xf'(x)}{1+\pi^{-f'(x)}}$$

$$=\frac{xf'(x)\times\pi^{f'(x)}}{1+\pi^{f'(x)}}$$

이므로

$$g(x)+g(-x)=\frac{xf'(x)}{1+\pi^{f'(x)}}+\frac{xf'(x)\times\pi^{f'(x)}}{1+\pi^{f'(x)}}$$

$$=\frac{xf'(x)\{1+\pi^{f'(x)}\}}{1+\pi^{f'(x)}}$$

$$=xf'(x) \quad \cdots\cdots ㉠$$

또한 $h(x)=g(x)-g(-x)$라 하면

$h(-x)=g(-x)-g(x)=-h(x)$이므로

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} h(x)\,dx=0$$

즉, $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{g(x)-g(-x)\}\,dx=0$이므로

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} g(x)\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} g(-x)\,dx$$

㉠에 의하여

$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{g(x)+g(-x)\}\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} xf'(x)\,dx$이므로

$$2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} g(x)\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} xf'(x)\,dx$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} g(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} xf'(x)\,dx$$

따라서

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{xf'(x)}{1+\pi^{f'(x)}}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} g(x)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} xf'(x)\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf'(x)\,dx$$

이때 $u(x)=x$, $v'(x)=f'(x)$로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=f(x)$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf'(x)\,dx=\Big[xf(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$$

$$=\frac{\pi}{2}f\left(\frac{\pi}{2}\right)-\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\times 12-12$$

$$=6\pi-12$$

답 ⑤

다른 풀이

조건 (가)에 의하여 모든 실수 x에 대하여

$f'(-x)\times(-x)'=f'(x)$

즉, $-f'(-x)=f'(x)$에서

$f'(-x)=-f'(x)$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{xf'(x)}{1+\pi^{f'(x)}}dx$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{xf'(x)}{1+\pi^{f'(x)}}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{xf'(x)}{1+\pi^{f'(x)}}dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{xf'(x)}{1+\pi^{f'(x)}}dx$에서 $-x=t$로 놓으면

$x=-\dfrac{\pi}{2}$일 때 $t=\dfrac{\pi}{2}$, $x=0$일 때 $t=0$이고,

$-1=\dfrac{dt}{dx}$이므로

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{xf'(x)}{1+\pi^{f'(x)}}dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{-tf'(-t)}{1+\pi^{f'(-t)}}dt$$
$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{tf'(t)}{1+\pi^{-f'(t)}}dt$$
$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{tf'(t)\times\pi^{f'(t)}}{1+\pi^{f'(t)}}dt$$
$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{xf'(x)\times\pi^{f'(x)}}{1+\pi^{f'(x)}}dx$$

이 식을 ㉠에 대입하면

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{xf'(x)}{1+\pi^{f'(x)}}dx$$
$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{xf'(x)\times\pi^{f'(x)}}{1+\pi^{f'(x)}}dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{xf'(x)}{1+\pi^{f'(x)}}dx$$
$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{xf'(x)\{\pi^{f'(x)}+1\}}{1+\pi^{f'(x)}}dx$$
$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}xf'(x)\,dx$$
$$=\Big[xf(x)\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,dx$$
$$=\frac{\pi}{2}f\left(\frac{\pi}{2}\right)-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,dx$$
$$=\frac{\pi}{2}\times12-12$$
$$=6\pi-12$$

07 정적분의 활용

유제 본문 87~95쪽

1 ②	2 ①	3 ⑤	4 ①	5 ③
6 ⑤	7 ①	8 ①	9 ③	

1 $$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n+2k}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{2}{n}}{1+2\times\frac{k}{n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{1+2\times\frac{k}{n}}\times\frac{1}{n}\right)$$
$$=\int_{0}^{1}\frac{2}{1+2x}dx$$
$$=\Big[\ln|1+2x|\Big]_{0}^{1}$$
$$=\ln 3-\ln 1$$
$$=\ln 3$$

답 ②

2 $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k\sqrt[n]{2^k}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\times2^{\frac{k}{n}}\right)$$
$$=\int_{0}^{1}(x\times2^x)\,dx$$

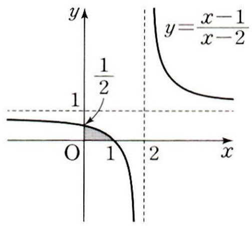
이때 $u(x)=x$, $v'(x)=2^x$으로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=\dfrac{2^x}{\ln 2}$이므로

$$\int_{0}^{1}(x\times2^x)\,dx=\Big[x\times\frac{2^x}{\ln 2}\Big]_{0}^{1}-\int_{0}^{1}\frac{2^x}{\ln 2}dx$$
$$=\frac{2}{\ln 2}-\Big[\frac{2^x}{(\ln 2)^2}\Big]_{0}^{1}$$
$$=\frac{2}{\ln 2}-\left\{\frac{2}{(\ln 2)^2}-\frac{1}{(\ln 2)^2}\right\}$$
$$=\frac{2}{\ln 2}-\frac{1}{(\ln 2)^2}$$
$$=\frac{2\ln 2-1}{(\ln 2)^2}$$

답 ①

3 $y=\dfrac{x-1}{x-2}=\dfrac{1}{x-2}+1$이므로 곡선 $y=\dfrac{x-1}{x-2}$은 그림과 같다.

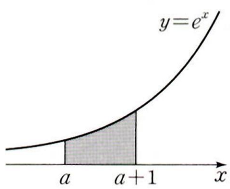


따라서 곡선 $y=\frac{x-1}{x-2}$과 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^1 \frac{x-1}{x-2}dx=\int_0^1\left(\frac{1}{x-2}+1\right)dx$$
$$=\Big[\ln|x-2|+x\Big]_0^1$$
$$=1-\ln 2$$

답 ⑤

4



$e^x\geq 0$이므로 곡선 $y=e^x$과 두 직선 $x=a$, $x=a+1$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_a^{a+1} e^x dx=\Big[e^x\Big]_a^{a+1}$$
$$=e^{a+1}-e^a$$
$$=e^a(e-1)$$

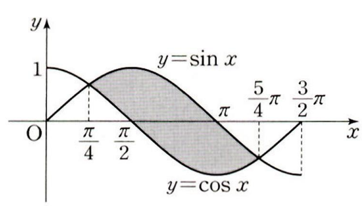
$e^a(e-1)=e^2-e=e(e-1)$에서

$e^a=e$

따라서 $a=1$

답 ①

5 $0\leq x\leq\frac{3}{2}\pi$에서 두 곡선 $y=\sin x$, $y=\cos x$의 교점의 x좌표는 $x=\frac{\pi}{4}$와 $x=\frac{5}{4}\pi$이다.



따라서 $0\leq x\leq\frac{3}{2}\pi$에서 두 곡선 $y=\sin x$, $y=\cos x$로 둘러싸인 부분의 넓이는

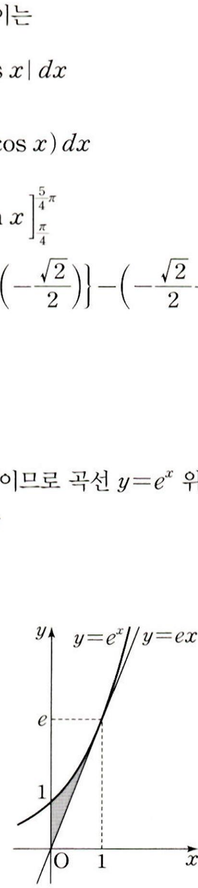
$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}|\sin x-\cos x|\,dx$$
$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}(\sin x-\cos x)\,dx$$
$$=\Big[-\cos x-\sin x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}$$
$$=\left\{-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$=2\sqrt{2}$$

답 ③

6 $y=e^x$에서 $y'=e^x$이므로 곡선 $y=e^x$ 위의 점 $(1, e)$에서의 접선 l의 방정식은

$y-e=e(x-1)$

$y=ex$



따라서 곡선 $y=e^x$과 접선 l 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^1(e^x-ex)\,dx=\left[e^x-\frac{e}{2}x^2\right]_0^1$$
$$=\left(e-\frac{e}{2}\right)-1$$
$$=\frac{e}{2}-1$$

답 ⑤

7 $0\leq t\leq 1$인 실수 t에 대하여 직선 $x=t$를 포함하고 x축에 수직인 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{t^2+1})^2$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}(t^2+1)$$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\int_0^1 S(t)\,dt=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^1(t^2+1)\,dt$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[\frac{1}{3}t^3+t\right]_0^1$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{4}{3}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

답 ①

8 $x=2e^t$, $y=\frac{t}{2}-e^{2t}$에서

$\frac{dx}{dt}=2e^t$, $\frac{dy}{dt}=\frac{1}{2}-2e^{2t}$

이므로

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{(2e^t)^2+\left(\frac{1}{2}-2e^{2t}\right)^2}$$
$$=\sqrt{4e^{2t}+\frac{1}{4}-2e^{2t}+4e^{4t}}$$
$$=\sqrt{4e^{4t}+2e^{2t}+\frac{1}{4}}$$
$$=\sqrt{\left(2e^{2t}+\frac{1}{2}\right)^2}$$
$$=2e^{2t}+\frac{1}{2}$$

따라서 시각 $t=0$에서 $t=1$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^1\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_0^1\left(2e^{2t}+\frac{1}{2}\right)dt$$
$$=\left[e^{2t}+\frac{1}{2}t\right]_0^1$$
$$=\left(e^2+\frac{1}{2}\right)-1$$
$$=e^2-\frac{1}{2}$$

답 ①

9 $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$에서

$f'(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$이므로

$$\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}=\sqrt{1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2}$$
$$=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

따라서 $0\le x\le \ln 2$에서 곡선 $y=f(x)$의 길이는

$$\int_0^{\ln 2}\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx=\int_0^{\ln 2}\frac{e^x+e^{-x}}{2}\,dx$$
$$=\left[\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right]_0^{\ln 2}$$
$$=\frac{e^{\ln 2}-e^{-\ln 2}}{2}-\frac{1-1}{2}$$
$$=\frac{2-\frac{1}{2}}{2}$$
$$=\frac{3}{4}$$

답 ③

Level 1 기초 연습

본문 96~97쪽

1 ①	2 ③	3 ⑤	4 ②	5 ①
6 ④	7 ②	8 ①		

1
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n^2}+\frac{1}{n}}{\frac{k^2}{n^2}+\frac{2k}{n}+1}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(\frac{k}{n}+1\right)\times\frac{1}{n}}{\left(\frac{k}{n}\right)^2+2\times\frac{k}{n}+1}$$
$$=\int_0^1\frac{x+1}{x^2+2x+1}\,dx$$
$$=\int_0^1\frac{x+1}{(x+1)^2}\,dx$$
$$=\int_0^1\frac{1}{x+1}\,dx$$
$$=\Big[\ln|x+1|\Big]_0^1$$
$$=\ln 2$$

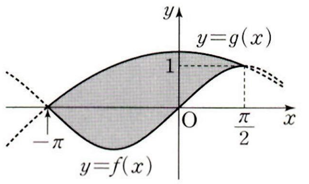
답 ①

2 $g(-\pi)=-\frac{4}{3\pi^2}\times\pi^2+\frac{4}{3}=0$,

$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{4}{3\pi^2}\times\frac{\pi^2}{4}+\frac{4}{3}=1$

이므로 $-\pi\le x\le\frac{\pi}{2}$에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는

그림과 같다.



따라서 $-\pi \le x \le \frac{\pi}{2}$에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \left\{\left(-\frac{4}{3\pi^2}x^2+\frac{4}{3}\right)-\sin x\right\}dx$$

$$=\left[-\frac{4}{9\pi^2}x^3+\frac{4}{3}x+\cos x\right]_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\left\{-\frac{4}{9\pi^2}\times\left(\frac{\pi}{2}\right)^3+\frac{4}{3}\times\frac{\pi}{2}\right\}-\left\{-\frac{4}{9\pi^2}\times(-\pi)^3+\frac{4}{3}\times(-\pi)-1\right\}$$

$$=-\frac{\pi}{18}+\frac{2}{3}\pi-\frac{4}{9}\pi+\frac{4}{3}\pi+1$$

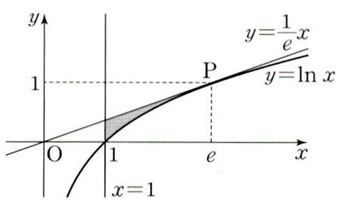
$$=\frac{3}{2}\pi+1$$

답 ③

3 $y=\ln x$에서 $y'=\frac{1}{x}$이므로 곡선 위의 점 $\mathrm{P}(e,\ 1)$에서의 접선 l의 방정식은

$$y=\frac{1}{e}(x-e)+1$$

$$y=\frac{1}{e}x$$



따라서 곡선 $y=\ln x$와 접선 l 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_1^e \left(\frac{1}{e}x-\ln x\right)dx=\left[\frac{1}{2e}x^2-x\ln x+x\right]_1^e$$

$$=\left(\frac{1}{2e}\times e^2-e\ln e+e\right)-\left(\frac{1}{2e}+1\right)$$

$$=\frac{e}{2}-\frac{1}{2e}-1$$

답 ⑤

4 $f(x)=(-x^2+4)e^x$이라 하면

$$f'(x)=-2xe^x+(-x^2+4)e^x$$

$$=(-x^2-2x+4)e^x$$

$f'(x)=0$에서

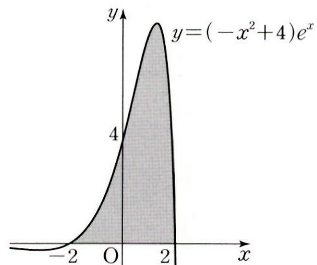
$-x^2-2x+4=0$, $x^2+2x-4=0$

$x=-1-\sqrt{5}$ 또는 $x=-1+\sqrt{5}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-1-\sqrt{5}$	$\cdots$	$-1+\sqrt{5}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

또한 곡선 $y=(-x^2+4)e^x$이 x축과 만나는 점의 x좌표는 $(-x^2+4)e^x=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$



이때 닫힌구간 $[-2,\ 2]$에서 $f(x)\ge 0$, 구간 $(-\infty,\ -2)$ 또는 구간 $(2,\ \infty)$에서 $f(x)<0$이므로 곡선 $y=(-x^2+4)e^x$과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{-2}^{2}(-x^2+4)e^x dx$$

이때 $u_1(x)=-x^2+4$, $v_1'(x)=e^x$으로 놓으면

$u_1'(x)=-2x$, $v_1(x)=e^x$이므로

$$S=\int_{-2}^{2}(-x^2+4)e^x dx$$

$$=\Big[(-x^2+4)e^x\Big]_{-2}^{2}+2\int_{-2}^{2}xe^x dx$$

$$=2\int_{-2}^{2}xe^x dx$$

또한 $u_2(x)=x$, $v_2'(x)=e^x$으로 놓으면

$u_2'(x)=1$, $v_2(x)=e^x$이므로

$$S=2\int_{-2}^{2}xe^x dx$$

$$=2\left(\Big[xe^x\Big]_{-2}^{2}-\int_{-2}^{2}e^x dx\right)$$

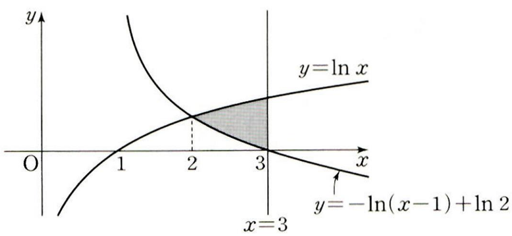
$$=2\left(2e^2+2e^{-2}-\Big[e^x\Big]_{-2}^{2}\right)$$

$=2\{2e^2+2e^{-2}-(e^2-e^{-2})\}$
$=2e^2+6e^{-2}$

답 ②

5 두 곡선 $y=\ln x$, $y=-\ln(x-1)+\ln 2$가 만나는 점의 x좌표는

$\ln x=-\ln(x-1)+\ln 2$에서
$\ln x+\ln(x-1)=\ln 2$
$\ln x(x-1)=\ln 2$
$x(x-1)=2$
$x^2-x-2=0$
$(x+1)(x-2)=0$
$x=-1$ 또는 $x=2$
이때 진수의 조건에 의하여 $x>1$이므로
$x=2$



따라서 두 곡선 $y=\ln x$, $y=-\ln(x-1)+\ln 2$와 직선 $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\int_2^3 [\ln x-\{-\ln(x-1)+\ln 2\}]\,dx$
$=\int_2^3 \ln x\,dx+\int_2^3 \ln(x-1)\,dx-\int_2^3 \ln 2\,dx$
$=\int_2^3 \ln x\,dx+\int_1^2 \ln x\,dx-\int_2^3 \ln 2\,dx$
$=\int_1^3 \ln x\,dx-\int_2^3 \ln 2\,dx$
$=\Big[x\ln x-x\Big]_1^3-\Big[(\ln 2)x\Big]_2^3$
$=(3\ln 3-3)-(0-1)-\ln 2$
$=3\ln 3-\ln 2-2$

답 ①

참고

곡선 $y=\ln(x-1)$을 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 도형의 방정식은 $y=\ln x$이므로

$\int_2^3 \ln(x-1)\,dx=\int_1^2 \ln x\,dx$

가 성립한다.

6 곡선 $y=f(x)$와 x축이 만나는 점의 x좌표는

$f(x)=\dfrac{(\ln x)^2}{x}=0$에서 $x=1$

이고 모든 양수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이므로 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=e^2$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면

$S=\int_1^{e^2} \dfrac{(\ln x)^2}{x}\,dx$

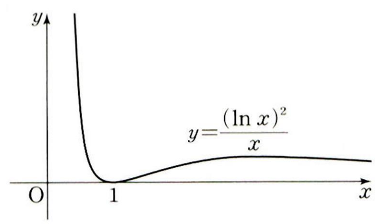
이때 $\ln x=t$로 놓으면
$x=1$일 때 $t=0$, $x=e^2$일 때 $t=2$이고,
$\dfrac{1}{x}=\dfrac{dt}{dx}$이므로

$S=\int_1^{e^2} \dfrac{(\ln x)^2}{x}\,dx$
$=\int_0^2 t^2\,dt$
$=\Big[\dfrac{1}{3}t^3\Big]_0^2$
$=\dfrac{8}{3}$

답 ④

참고

곡선 $y=\dfrac{(\ln x)^2}{x}$은 그림과 같다.



7 $\sqrt{\dfrac{\pi}{6}}\leq t\leq\sqrt{\dfrac{\pi}{4}}$인 실수 t에 대하여 직선 $x=t$를 포함하고 x축에 수직인 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=\dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{\sqrt{t\sin t^2}}{2}\right)^2=\dfrac{\pi}{8}\times t\sin t^2$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V라 하면

$V=\int_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{4}}}\left(\dfrac{\pi}{8}\times t\sin t^2\right)dt=\dfrac{\pi}{8}\int_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{4}}} t\sin t^2\,dt$

이때 $t^2=y$로 놓으면

$t=\sqrt{\dfrac{\pi}{6}}$일 때 $y=\dfrac{\pi}{6}$, $t=\sqrt{\dfrac{\pi}{4}}$일 때 $y=\dfrac{\pi}{4}$이고,

$2t=\dfrac{dy}{dt}$이므로

$$V=\frac{\pi}{8}\int_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{4}}} t\sin t^2\,dt$$
$$=\frac{\pi}{8}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\sin y\,dy$$
$$=\frac{\pi}{16}\Big[-\cos y\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=\frac{\pi}{16}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{32}\pi$$

답 ②

8 $x=\cos t+t\sin t$, $y=\sin t-t\cos t$에서

$$\frac{dx}{dt}=-\sin t+\sin t+t\cos t=t\cos t,$$
$$\frac{dy}{dt}=\cos t-\cos t+t\sin t=t\sin t$$

이므로

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{(t\cos t)^2+(t\sin t)^2}$$
$$=\sqrt{t^2(\cos^2 t+\sin^2 t)}$$
$$=\sqrt{t^2}=t$$

따라서 시각 $t=\frac{\pi}{2}$에서 $t=\pi$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}t\,dt=\Big[\frac{1}{2}t^2\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$
$$=\frac{1}{2}\pi^2-\frac{1}{8}\pi^2$$
$$=\frac{3}{8}\pi^2$$

답 ①

Level 2 기본 연습

본문 98~99쪽

1 ①	2 ①	3 ②	4 ①	5 ④
6 ③	7 ⑤	8 ②		

1 $y=4\sin x\cos x-6\sin x+2\cos x-3$
$=(2\sin x+1)(2\cos x-3)$
이고 $2\cos x-3<0$이므로 닫힌구간 $[0,\ 2\pi]$에서 이 곡선이 x축과 만나는 점의 x좌표는

$2\sin x+1=0$, 즉 $\sin x=-\frac{1}{2}$에서

$x=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$

이때 $\frac{7}{6}\pi\le x\le\frac{11}{6}\pi$에서 $y\ge 0$이므로

곡선과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{\frac{7}{6}\pi}^{\frac{11}{6}\pi}|4\sin x\cos x-6\sin x+2\cos x-3|\,dx$$
$$=\int_{\frac{7}{6}\pi}^{\frac{11}{6}\pi}(4\sin x\cos x-6\sin x+2\cos x-3)\,dx$$
$$=4\int_{\frac{7}{6}\pi}^{\frac{11}{6}\pi}\sin x\cos x\,dx-6\int_{\frac{7}{6}\pi}^{\frac{11}{6}\pi}\sin x\,dx$$
$$+2\int_{\frac{7}{6}\pi}^{\frac{11}{6}\pi}\cos x\,dx-\int_{\frac{7}{6}\pi}^{\frac{11}{6}\pi}3\,dx$$

$\int_{\frac{7}{6}\pi}^{\frac{11}{6}\pi}\sin x\cos x\,dx$에서 $\sin x=t$로 놓으면

$x=\frac{7}{6}\pi$일 때 $t=-\frac{1}{2}$, $x=\frac{11}{6}\pi$일 때 $t=-\frac{1}{2}$이고,

$\cos x=\frac{dt}{dx}$이므로

$$\int_{\frac{7}{6}\pi}^{\frac{11}{6}\pi}\sin x\cos x\,dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}}t\,dt=0$$

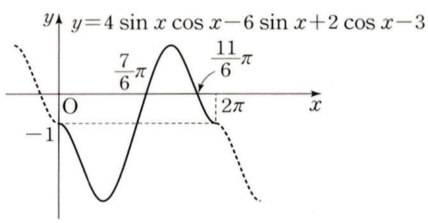
따라서

$$S=4\times 0-6\int_{\frac{7}{6}\pi}^{\frac{11}{6}\pi}\sin x\,dx+2\int_{\frac{7}{6}\pi}^{\frac{11}{6}\pi}\cos x\,dx-\int_{\frac{7}{6}\pi}^{\frac{11}{6}\pi}3\,dx$$
$$=-6\Big[-\cos x\Big]_{\frac{7}{6}\pi}^{\frac{11}{6}\pi}+2\Big[\sin x\Big]_{\frac{7}{6}\pi}^{\frac{11}{6}\pi}-3\Big[x\Big]_{\frac{7}{6}\pi}^{\frac{11}{6}\pi}$$
$$=-6\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+2\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)-3\left(\frac{11}{6}\pi-\frac{7}{6}\pi\right)$$
$$=6\sqrt{3}-2\pi$$

답 ①

참고

닫힌구간 $[0,\ 2\pi]$에서 곡선
$y=4\sin x\cos x-6\sin x+2\cos x-3$은 그림과 같다.



2 $f(x)=-xe^x$에서
$f'(x)=-e^x-xe^x=-(x+1)e^x$

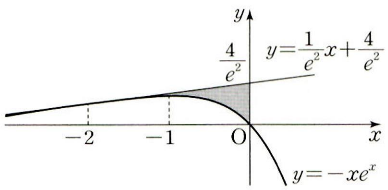
$f(-2)=2e^{-2}=\frac{2}{e^2}$, $f'(-2)=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}\left(-2, \frac{2}{e^2}\right)$에서의 접선 l의 방정식은

$y-\frac{2}{e^2}=\frac{1}{e^2}(x+2)$, 즉 $y=\frac{1}{e^2}x+\frac{4}{e^2}$

또한 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$

이때 곡선 $y=f(x)$와 접선 l은 그림과 같다.



따라서 곡선 $y=f(x)$와 접선 l 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_{-2}^{0}\left(\frac{1}{e^2}x+\frac{4}{e^2}+xe^x\right)dx$$
$$=\int_{-2}^{0}\left(\frac{1}{e^2}x+\frac{4}{e^2}\right)dx+\int_{-2}^{0}xe^x\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2e^2}x^2+\frac{4}{e^2}x\right]_{-2}^{0}+\left[xe^x\right]_{-2}^{0}-\int_{-2}^{0}e^x\,dx$$
$$=-\frac{2}{e^2}+\frac{8}{e^2}+2e^{-2}-\left[e^x\right]_{-2}^{0}$$
$$=\frac{6}{e^2}+\frac{2}{e^2}-\left(1-\frac{1}{e^2}\right)$$
$$=\frac{9}{e^2}-1$$

답 ①

3 $y=\ln x$에서 $y'=\frac{1}{x}$이므로

점 $\mathrm{P}(a, \ln a)$에서의 접선의 기울기는 $\frac{1}{a}$이다.

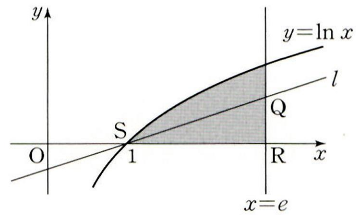
그러므로 점 $(1, 0)$을 지나고 기울기가 $\frac{1}{a}$인 직선 l의 방정식은

$y=\frac{1}{a}(x-1)$, 즉 $y=\frac{1}{a}x-\frac{1}{a}$

이때 곡선 $y=\ln x$와 x축 및 직선 $x=e$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_{1}^{e}\ln x\,dx=\Big[x\ln x-x\Big]_{1}^{e}$$
$$=(e-e)-(-1)=1$$

곡선 $y=\ln x$와 x축 및 직선 $x=e$로 둘러싸인 부분의 넓이를 직선 l이 이등분하므로 직선 l과 직선 $x=e$의 교점을 $\mathrm{Q}(e, k)$라 하고 점 $\mathrm{R}(e, 0)$, 점 $\mathrm{S}(1, 0)$이라 할 때, 삼각형 QSR의 넓이가 $\frac{1}{2}$이어야 한다.



즉, $\frac{1}{2}\times(e-1)\times k=\frac{1}{2}$에서 $k=\frac{1}{e-1}$

이때 점 $\mathrm{Q}\left(e, \frac{1}{e-1}\right)$은 직선 l 위의 점이므로

$\frac{1}{e-1}=\frac{1}{a}\times e-\frac{1}{a}$

$\frac{1}{e-1}=\frac{1}{a}(e-1)$

따라서 $a=(e-1)^2$

답 ②

4 두 함수 $f(x)=3e^x-6$, $g(x)=e^{2x}-4e^x$에 대하여

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표는

$3e^x-6=e^{2x}-4e^x$에서

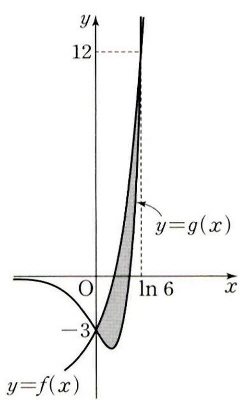
$e^{2x}-7e^x+6=0$

$(e^x-1)(e^x-6)=0$

$e^x=1$ 또는 $e^x=6$

$x=0$ 또는 $x=\ln 6$

이때 $0\le x\le \ln 6$에서 $f(x)\ge g(x)$이다.



따라서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^{\ln 6}\{f(x)-g(x)\}\,dx$$
$$=\int_0^{\ln 6}\{(3e^x-6)-(e^{2x}-4e^x)\}\,dx$$
$$=\int_0^{\ln 6}(-e^{2x}+7e^x-6)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{2}e^{2x}+7e^x-6x\right]_0^{\ln 6}$$
$$=\left(-\frac{1}{2}e^{2\ln 6}+7e^{\ln 6}-6\ln 6\right)-\left(-\frac{1}{2}+7\right)$$
$$=-\frac{1}{2}\times 36+7\times 6-6\ln 6-\frac{13}{2}$$
$$=\frac{35}{2}-6\ln 6$$

답 ①

5 $f(x)=(\ln x)^2+2\ln x+3$에서

$$f'(x)=2(\ln x)\times\frac{1}{x}+\frac{2}{x}$$
$$=\frac{2(\ln x+1)}{x}$$
$$f''(x)=\frac{\frac{2}{x}\times x-2(\ln x+1)\times 1}{x^2}$$
$$=\frac{-2\ln x}{x^2}$$

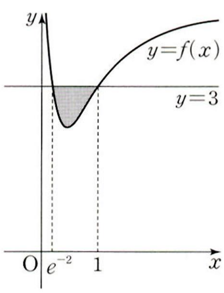
$f''(x)=0$에서 $x=1$이고, $x=1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 곡선 $y=f(x)$의 변곡점은 $(1, f(1))$, 즉 $(1, 3)$이다.

또한 직선 $y=3$과 곡선 $y=f(x)$의 교점의 x좌표는

$(\ln x)^2+2\ln x+3=3$에서 $\ln x(\ln x+2)=0$

$\ln x=-2$ 또는 $\ln x=0$

$x=e^{-2}$ 또는 $x=1$



이때 $e^{-2}\le x\le 1$에서 $f(x)\le 3$이므로 직선 $y=3$과 곡선 $y=f(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{e^{-2}}^{1}\{-(\ln x)^2-2\ln x\}\,dx$$
$$=-\int_{e^{-2}}^{1}(\ln x)^2\,dx-\int_{e^{-2}}^{1}2\ln x\,dx$$

이때 $\int_{e^{-2}}^{1}(\ln x)^2\,dx$에서

$u(x)=(\ln x)^2$, $v'(x)=1$로 놓으면

$u'(x)=\frac{2\ln x}{x}$, $v(x)=x$이므로

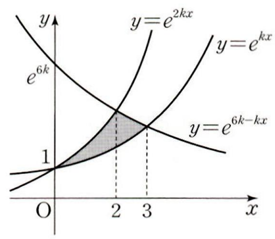
$$\int_{e^{-2}}^{1}(\ln x)^2\,dx=\left[x(\ln x)^2\right]_{e^{-2}}^{1}-\int_{e^{-2}}^{1}2\ln x\,dx$$

따라서

$$S=-\int_{e^{-2}}^{1}(\ln x)^2dx-\int_{e^{-2}}^{1}2\ln x\,dx$$
$$=-\left[x(\ln x)^2\right]_{e^{-2}}^{1}+\int_{e^{-2}}^{1}2\ln x\,dx-\int_{e^{-2}}^{1}2\ln x\,dx$$
$$=-\left[x(\ln x)^2\right]_{e^{-2}}^{1}$$
$$=\frac{4}{e^2}$$

답 ④

6 $k>0$이므로 세 곡선 $y=e^{kx}$, $y=e^{2kx}$, $y=e^{6k-kx}$은 그림과 같다.



이때 두 곡선 $y=e^{kx}$, $y=e^{6k-kx}$의 교점의 x좌표는

$e^{kx}=e^{6k-kx}$에서 $kx=6k-kx$

$2kx=6k$, $x=3$

또 두 곡선 $y=e^{2kx}$, $y=e^{6k-kx}$의 교점의 x좌표는

$e^{2kx}=e^{6k-kx}$에서 $2kx=6k-kx$

$3kx=6k$, $x=2$

따라서 세 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$S(k)=\int_0^2 e^{2kx}dx+\int_2^3 e^{6k-kx}dx-\int_0^3 e^{kx}dx$$
$$=\left[\frac{1}{2k}e^{2kx}\right]_0^2+\left[-\frac{1}{k}e^{6k-kx}\right]_2^3-\left[\frac{1}{k}e^{kx}\right]_0^3$$
$$=\frac{1}{2k}e^{4k}-\frac{1}{2k}-\frac{1}{k}e^{3k}+\frac{1}{k}e^{4k}-\frac{1}{k}e^{3k}+\frac{1}{k}$$
$$=\frac{3}{2k}e^{4k}-\frac{2}{k}e^{3k}+\frac{1}{2k}$$

이므로

$$\lim_{k\to0+}\frac{S(k)}{k}$$
$$=\lim_{k\to0+}\frac{3e^{4k}-4e^{3k}+1}{2k^2}$$
$$=\lim_{k\to0+}\frac{(e^k-1)^2(3e^{2k}+2e^k+1)}{2k^2}$$
$$=\lim_{k\to0+}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{e^k-1}{k}\right)^2\times(3e^{2k}+2e^k+1)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\times1^2\times6$$
$$=3$$

답 ③

7 $1\le t\le3$인 실수 t에 대하여 직선 $x=t$를 포함하고 x축에 수직인 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{1}{2}t-\left(t^2-\frac{7}{2}t\right)=-t^2+4t$$

이므로

$$S(t)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{\mathrm{PQ}}\right)^2$$
$$=\frac{1}{4}\overline{\mathrm{PQ}}^2$$
$$=\frac{1}{4}(-t^2+4t)^2$$
$$=\frac{1}{4}t^4-2t^3+4t^2$$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V라 하면

$$V=\int_1^3 S(t)\,dt$$
$$=\int_1^3\left(\frac{1}{4}t^4-2t^3+4t^2\right)dt$$
$$=\left[\frac{1}{20}t^5-\frac{1}{2}t^4+\frac{4}{3}t^3\right]_1^3$$
$$=\left(\frac{243}{20}-\frac{81}{2}+36\right)-\left(\frac{1}{20}-\frac{1}{2}+\frac{4}{3}\right)$$
$$=\frac{203}{30}$$

답 ⑤

8 $x=\frac{4\sqrt{3}}{3}t^{\frac{3}{2}}$, $y=2t$에서

$\frac{dx}{dt}=2\sqrt{3}t^{\frac{1}{2}}$, $\frac{dy}{dt}=2$이므로

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{\left(2\sqrt{3}t^{\frac{1}{2}}\right)^2+2^2}=\sqrt{12t+4}$$

따라서 시각 $t=0$에서 $t=a$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^a\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt=\int_0^a\sqrt{12t+4}\,dt$$
$$=2\int_0^a\sqrt{3t+1}\,dt$$
$$=2\int_0^a(3t+1)^{\frac{1}{2}}dt$$
$$=2\left[\frac{2}{9}(3t+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^a$$
$$=\frac{4}{9}(3a+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{9}$$

$\frac{4}{9}(3a+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{9}=\frac{28}{9}$에서

$(3a+1)^{\frac{3}{2}}=8$

$(3a+1)^{\frac{1}{2}}=2$

$3a+1=4$

따라서 $a=1$

답 ②

참고

$2\int_0^a\sqrt{3t+1}\,dt$에서

$3t+1=z$로 놓으면

$t=0$일 때 $z=1$, $t=a$일 때 $z=3a+1$이고,

$3=\frac{dz}{dt}$이므로

$$2\int_0^a\sqrt{3t+1}\,dt=\frac{2}{3}\int_1^{3a+1}\sqrt{z}\,dz$$
$$=\frac{2}{3}\left[\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}\right]_1^{3a+1}$$
$$=\frac{4}{9}(3a+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{9}$$

Level 3 실력 완성

본문 100쪽

1 ① 2 ⑤ 3 ②

1 $f(x)=nx(1-x^2)^n$에서

$$f'(x)=n(1-x^2)^n+nx\times n(1-x^2)^{n-1}\times(-2x)$$
$$=n(1-x^2)^{n-1}\{(1-x^2)-2nx^2\}$$
$$=n(1-x^2)^{n-1}\{1-(2n+1)x^2\}$$

$0<x<1$에서 $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값에서 극대이면서 최대이므로

$a_n=\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

또한 닫힌구간 $[0, 1]$에서 $f(x)\ge 0$이므로

닫힌구간 $[0, a_n]$에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $x=a_n$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$S_n=\int_0^{a_n} nx(1-x^2)^n\,dx$

이때 $1-x^2=y$로 놓으면

$x=0$일 때 $y=1$, $x=a_n$일 때 $y=1-{a_n}^2$이고,

$-2x=\frac{dy}{dx}$이므로

$$
\begin{aligned}
S_n&=\int_0^{a_n} nx(1-x^2)^n\,dx\\
&=-\frac{1}{2}\int_1^{1-{a_n}^2} ny^n\,dy\\
&=-\frac{1}{2}\left[\frac{n}{n+1}y^{n+1}\right]_1^{1-{a_n}^2}\\
&=-\frac{1}{2}\left\{\frac{n}{n+1}(1-{a_n}^2)^{n+1}-\frac{n}{n+1}\right\}\\
&=\frac{n}{2n+2}\left\{1-\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)^{n+1}\right\}\\
&=\frac{n}{2n+2}\left\{1-\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{n+1}\right\}
\end{aligned}
$$

이때

$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{2}{n}}=\frac{1}{2+0}=\frac{1}{2}$,

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{n+1}&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2n}}\right)^{n+1}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n+1}}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n\times\frac{1}{2}}\times\left(1+\frac{1}{2n}\right)}\\
&=\frac{1}{e^{\frac{1}{2}}}\\
&=\frac{1}{\sqrt{e}}
\end{aligned}
$$

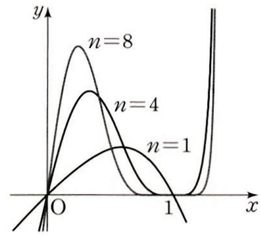
이므로

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}S_n&=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{2n+2}\left\{1-\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{n+1}\right\}\right]\\
&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)
\end{aligned}
$$

답 ①

참고

n의 값에 따른 곡선 $y=nx(1-x^2)^n$은 그림과 같다.



2 $f(x)=k(\ln x)^2$에서

$f'(x)=2k\ln x\times\frac{1}{x}=\frac{2k\ln x}{x}$이므로

곡선 $y=k(\ln x)^2$ 위의 점 $(a, k(\ln a)^2)$에서의 접선의 방정식은

$y-k(\ln a)^2=\frac{2k\ln a}{a}(x-a)$

$y=\frac{2k\ln a}{a}x-2k\ln a+k(\ln a)^2$

이때 이 접선이 점 $\mathrm{A}\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}e\right)$를 지나므로

$\frac{\sqrt{3}}{2}e=-2k\ln a+k(\ln a)^2$

$k(\ln a)^2-2k\ln a-\frac{\sqrt{3}}{2}e=0$ ······ ㉠

또한 조건 (가)에 의하여 ㉠의 $\ln a$에 대한 이차방정식의 두 근은 $\ln p$, $\ln q$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\ln p+\ln q=\frac{2k}{k}=2$, $\ln pq=2$, $pq=e^2$ ······ ㉡

$\ln p\times\ln q=-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{e}{k}$ ······ ㉢

또한 조건 (나)에 의하여

$\frac{2k\ln p}{p}\times\frac{2k\ln q}{q}=\frac{4k^2\ln p\times\ln q}{pq}=-1$

이때 ㉡, ㉢에 의하여

$\frac{4k^2\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{e}{k}\right)}{e^2}=-2\sqrt{3}\times\frac{k}{e}=-1$

$k=\frac{\sqrt{3}}{6}e$

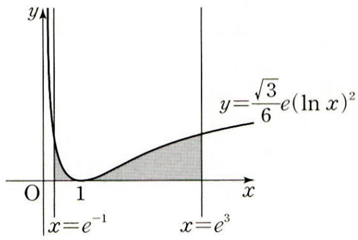
따라서 $f(x)=\frac{\sqrt{3}}{6}e(\ln x)^2$이고 ㉠에서

$\frac{\sqrt{3}}{6}e(\ln a)^2-\frac{\sqrt{3}}{3}e\ln a-\frac{\sqrt{3}}{2}e=0$

$(\ln a)^2-2\ln a-3=0$

$(\ln a+1)(\ln a-3)=0$

$\ln a=-1$ 또는 $\ln a=3$
즉, $a=e^{-1}$ 또는 $a=e^3$이고 $p<q$이므로
$p=e^{-1}$, $q=e^3$



이때 $f(x)\geq 0$이므로 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $x=e^{-1}$, $x=e^3$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{e^{-1}}^{e^3}\frac{\sqrt{3}}{6}e(\ln x)^2dx$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{6}e\int_{e^{-1}}^{e^3}(\ln x)^2dx$$

$\int_{e^{-1}}^{e^3}(\ln x)^2dx$에서

$u(x)=(\ln x)^2$, $v'(x)=1$로 놓으면

$u'(x)=\frac{2\ln x}{x}$, $v(x)=x$이므로

$$\int_{e^{-1}}^{e^3}(\ln x)^2dx$$
$$=\Big[x(\ln x)^2\Big]_{e^{-1}}^{e^3}-\int_{e^{-1}}^{e^3}2\ln x\,dx$$
$$=9e^3-e^{-1}-2\Big[x\ln x-x\Big]_{e^{-1}}^{e^3}$$
$$=9e^3-\frac{1}{e}-2\{(3e^3-e^3)-(-e^{-1}-e^{-1})\}$$
$$=9e^3-\frac{1}{e}-2\left(2e^3+\frac{2}{e}\right)$$
$$=5e^3-\frac{5}{e}$$

따라서

$$S=\frac{\sqrt{3}}{6}e\int_{e^{-1}}^{e^3}(\ln x)^2dx$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{6}e\left(5e^3-\frac{5}{e}\right)$$
$$=\frac{5\sqrt{3}}{6}(e^4-1)$$

답 ⑤

3 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$에서 $\sec x>0$이므로 $f(x)>0$이고, $0<x<\frac{\pi}{2}$에서만 $g(x)>0$이므로 두 함수 $f(x)=a\sec x$, $g(x)=2\sin x\cos x$의 그래프가 만나는 점의 x좌표를 θ라 하면 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이다.

이때 $f(\theta)=g(\theta)$이므로

$a\sec\theta=2\sin\theta\cos\theta$

$a=2\sin\theta\cos^2\theta$ …… ㉠

또한

$f'(x)=a\sec x\tan x$, $g'(x)=2\cos^2 x-2\sin^2 x$

이고 $f'(\theta)=g'(\theta)$이므로

$a\sec\theta\tan\theta=2\cos^2\theta-2\sin^2\theta$

$2\sin\theta\cos^2\theta\times\sec\theta\tan\theta=2\cos^2\theta-2\sin^2\theta$

$2\sin^2\theta=2\cos^2\theta-2\sin^2\theta$

$2\sin^2\theta=2(1-\sin^2\theta)-2\sin^2\theta$

$\sin^2\theta=\frac{1}{3}$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$이고

$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$이므로 ㉠에 대입하면

$a=2\times\frac{1}{\sqrt{3}}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{4\sqrt{3}}{9}$

한편, $f'(x)=0$에서 $\tan x=0$이므로 $x=0$이다.

$x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값 $f(0)=\frac{4\sqrt{3}}{9}$을 갖는다.

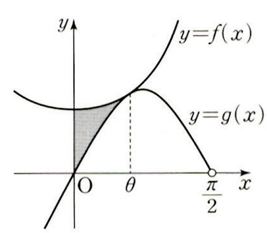
또한 $g'(x)=0$에서 $\cos^2 x=\sin^2 x$, 즉 $\tan x=\pm1$이므로 $x=-\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{\pi}{4}$이다.

$x=-\frac{\pi}{4}$의 좌우에서 $g'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $g(x)$는 $x=-\frac{\pi}{4}$에서 극솟값

$g\left(-\frac{\pi}{4}\right)=2\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\times\frac{\sqrt{2}}{2}=-1$을 갖고,

$x=\frac{\pi}{4}$의 좌우에서 $g'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $g(x)$는 $x=\frac{\pi}{4}$에서 극댓값

$g\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=1$을 갖는다.



따라서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면

$$S=\int_0^\theta\left(\frac{4\sqrt{3}}{9}\sec x-2\sin x\cos x\right)dx$$
$$=\frac{4\sqrt{3}}{9}\int_0^\theta \sec x\,dx-\int_0^\theta 2\sin x\cos x\,dx \quad \cdots\cdots ㉡$$

이때

$$\int_0^\theta \sec x\,dx$$
$$=\int_0^\theta \frac{1}{\cos x}dx$$
$$=\int_0^\theta \frac{\cos x}{\cos^2 x}dx$$
$$=\int_0^\theta \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx$$
$$=\int_0^\theta \frac{\cos x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}dx$$
$$=\int_0^\theta \frac{1}{2}\left(\frac{\cos x}{1-\sin x}+\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^\theta\left\{-\frac{(1-\sin x)'}{1-\sin x}+\frac{(1+\sin x)'}{1+\sin x}\right\}dx$$
$$=\frac{1}{2}\Big[-\ln|1-\sin x|+\ln|1+\sin x|\Big]_0^\theta$$
$$=\frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|\right]_0^\theta$$
$$=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}-\ln\frac{1+0}{1-0}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}-0$$
$$=\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$
$$=\frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{3})$$

$$\int_0^\theta 2\sin x\cos x\,dx=\Big[\sin^2 x\Big]_0^\theta=\sin^2\theta$$
$$=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{1}{3}$$

이므로 ㉡에서

$$S=\frac{4\sqrt{3}}{9}\int_0^\theta \sec x\,dx-\int_0^\theta 2\sin x\cos x\,dx$$
$$=\frac{4\sqrt{3}}{9}\times\frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{3})-\frac{1}{3}$$
$$=\frac{2\sqrt{3}}{9}\ln(2+\sqrt{3})-\frac{1}{3}$$

답 ②

고2~N수 수능 집중 로드맵

수능 입문 → 기출 / 연습 → 연계+연계 보완 → 심화 / 발전 → 모의고사

수능 입문
- 윤혜정의 개념/패턴의 나비효과
- 하루 6개 1등급 영어독해
- 수능 감(感)잡기
- 수능특강 Light

강의노트
- 수능개념

기출 / 연습
- 윤혜정의 기출의 나비효과
- 수능 기출의 미래
- 수능 기출의 미래 미니모의고사
- 수능특강Q 미니모의고사

연계+연계 보완
- 수능연계교재의 VOCA 1800
- 수능연계 기출 Vaccine VOCA 2200

연계
- 수능특강
- 수능완성

- 수능특강 사용설명서
- 수능특강 연계 기출
- 수능 영어 간접연계 서치라이트
- 수능완성 사용설명서

심화 / 발전
- 수능연계완성 3주 특강
- 박봄의 사회 · 문화 표 분석의 패턴

모의고사
- FINAL 실전모의고사
- 만점마무리 봉투모의고사
- 만점마무리 봉투모의고사 시즌2

구분	시리즈명	특징	수준	영역
수능 입문	윤혜정의 개념/패턴의 나비효과	윤혜정 선생님과 함께하는 수능 국어 개념/패턴 학습		국어
	하루 6개 1등급 영어독해	매일 꾸준한 기출문제 학습으로 완성하는 1등급 영어 독해		영어
	수능 감(感) 잡기	동일 소재·유형의 내신과 수능 문항 비교로 수능 입문		국/수/영
	수능특강 Light	수능 연계교재 학습 전 연계교재 입문서		영어
	수능개념	EBSi 대표 강사들과 함께하는 수능 개념 다지기		전 영역
기출/연습	윤혜정의 기출의 나비효과	윤혜정 선생님과 함께하는 까다로운 국어 기출 완전 정복		국어
	수능 기출의 미래	올해 수능에 딱 필요한 문제만 선별한 기출문제집		전 영역
	수능 기출의 미래 미니모의고사	부담없는 실전 훈련, 고품질 기출 미니모의고사		국/수/영
	수능특강Q 미니모의고사	매일 15분으로 연습하는 고품격 미니모의고사		전 영역
연계 + 연계 보완	수능특강	최신 수능 경향과 기출 유형을 분석한 종합 개념서		전 영역
	수능특강 사용설명서	수능 연계교재 수능특강의 지문·자료·문항 분석		국/영
	수능특강 연계 기출	수능특강 수록 작품·지문과 연결된 기출문제 학습		국어
	수능완성	유형 분석과 실전모의고사로 단련하는 문항 연습		전 영역
	수능완성 사용설명서	수능 연계교재 수능완성의 국어·영어 지문 분석		국/영
	수능 영어 간접연계 서치라이트	출제 가능성이 높은 핵심만 모아 구성한 간접연계 대비 교재		영어
	수능연계교재의 VOCA 1800	수능특강과 수능완성의 필수 중요 어휘 1800개 수록		영어
	수능연계 기출 Vaccine VOCA 2200	수능-EBS 연계 및 평가원 최다 빈출 어휘 선별 수록		영어
심화/발전	수능연계완성 3주 특강	단기간에 끝내는 수능 1등급 변별 문항 대비서		국/수/영
	박봄의 사회·문화 표 분석의 패턴	박봄 선생님과 사회·문화 표 분석 문항의 패턴 연습		사회탐구
모의고사	FINAL 실전모의고사	EBS 모의고사 중 최다 분량, 최다 과목 모의고사		전 영역
	만점마무리 봉투모의고사	실제 시험지 형태와 OMR 카드로 실전 훈련 모의고사		전 영역
	만점마무리 봉투모의고사 시즌2	수능 완벽대비 최종 봉투모의고사		국/수/영